PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023-2024

Hoja de Probabilidad II

Fecha: 26 de abril, 10, 17 y 24 de mayo **Grupo:** Mercurio y Venus

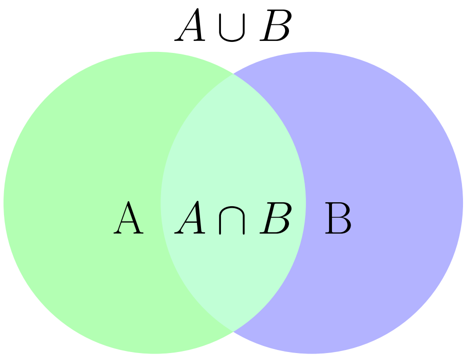
Suponemos que ya conoces el concepto de probabilidad de antes. En esta hoja repasaremos algunos métodos básicos de cálculo de probabilidades y terminaremos con algunos más avanzados

Unión e intersección de sucesos

Muchas veces necesitamos hallar la probabilidad de un suceso complejo, formado por varios sucesos simples. Cuando necesitamos que se cumpla al menos una de dos condiciones A y B, hablamos de la **unión** de los sucesos $A \cup B$. Si hace falta que se cumplan ambas condiciones, se trata de la **intersección** de los sucesos $A \cap B$. Las probabilidades de la unión y la de la intersección están relacionadas con la siguiente fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para entenderla basta echarle un vistazo al siguiente diagrama de Euler-Venn. Si sumamos las probabilidades $P(A) + P(B)$, la parte central, $P(A \cap B)$, se cuenta dos veces, por lo que hay que restarla de la suma para llegar a la probabilidad de la unión:



Definición 1. Dos sucesos A, B se llaman **independientes** si el hecho de que ocurra A no influye en la probabilidad de que ocurra B.

Podemos considerar independientes, por ejemplo, el hecho de que Donald Trump se tome un café por la mañana y el hecho de que una niña granadina de 1º de Primaria llegue tarde al cole (si quieres pasar media hora totalmente rayado, ¡piensa en el efecto mariposa!).

Ejemplo resuelto. Hemos lanzado un dado 3 veces y ha salido un 6. ¿Cuál es la probabilidad de que, al volver a lanzarlo, salga un 6?

Solución. Este ejemplo es muy importante. Algunos pensarán que si el 6 ha salido tantas veces es más probable que ahora no salga. Otros dirán que el dado está trucado y la probabilidad de que vuelva a salir un 6 es mayor de $\frac{1}{6}$. En el mundo real no podemos descartar esta posibilidad. Pero en el mundo matemático, donde suponemos que los 6 resultados son equiprobables, la respuesta del 4º lanzamiento **no**

depende de los resultados anteriores, sigue siendo $\frac{1}{6}$. El dado no tiene memoria ni tampoco va a intentar mostrarnos una cara diferente para variar. Por eso consideramos que los consecutivos lanzamientos de dado o de moneda son independientes. Lo serían incluso si el dado estuviera trucado. $\square$

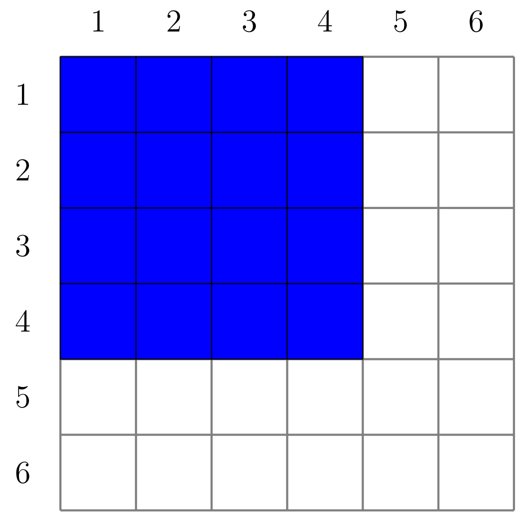
Si y solo si los sucesos A y B son independientes, podemos recurrir a la regla del producto:

Teorema 1.

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo resuelto. Hallemos la probabilidad de que al lanzar dos dados salgan solamente 1, 2, 3 o 4.

Solución. Por supuesto, podemos representar el espacio muestral como una tabla de 6×6 y contar las casillas azules:



Pero para 3 lanzamientos de dado tendríamos que hacer un dibujo tridimensional, y para 4 sería ya imposible. Sin embargo, recurriendo a la regla del producto (ya que los lanzamientos son independientes) hallamos la respuesta en una operación:

$$P(1, 2, 3 \text{ o } 4 \text{ en } 2 \text{ lanzamientos}) = P(1, 2, 3, 4) \cdot P(1, 2, 3, 4) = (\frac{4}{6})^2 = \frac{4}{9}. \quad \square$$

Problema 1. Halla la probabilidad de que un número de 3 cifras cogido al azar sea múltiplo de 5 o múltiplo de 7.

Solución. Para empezar, calcularemos el tamaño del espacio muestral. La primera cifra de un número de 3 cifras puede ser cualquiera menos el 0, las demás no tienen restricciones. En total, hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de tres cifras.

Calcularemos ahora los múltiplos de 5, son exactamente $\frac{1}{5} \cdot 900 = 180$. Los múltiplos de 7 hay que contarlos con cuidado porque el primer múltiplo de 7 mayor de 99 no es 100 sino 105, por tanto son $\lfloor \frac{999-105}{7} \rfloor = 127$. Los múltiplos de 7 que, además, son múltiplos de 5 son $\lfloor \frac{999-105}{7 \cdot 5} \rfloor = 25$. Usando la fórmula de la unión y nombrando m_7 múltiplos de 7 y m_5 múltiplos de 5,

$$m_7 \cup m_5 = m_7 + m_5 - m_7 \cap m_5 = 127 + 180 - 25 = 282$$

Por tanto, la probabilidad de un número cogido al azar sea múltiplo de 7 o de 5 es $\frac{282}{900} = \frac{47}{150} \approx \frac{1}{3}$. $\square$

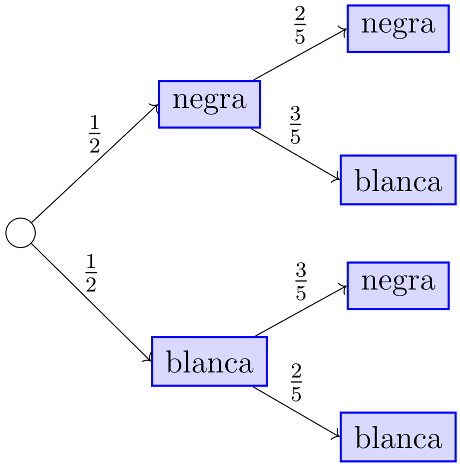
Árboles de sucesos

A menudo el primer suceso que ocurre cambia el segundo.

Ejemplo resuelto. En una urna hay 3 bolas blancas y 3 negras. Sacamos una bola, luego otra. Halla la probabilidad de que ambas bolas sean blancas.

Solución. La probabilidad de que la primera sea blanca claramente es un medio. Pero al sacar la primera, quedan solamente 2 blancas, por lo que la probabilidad de que la segunda sea blanca es igual a $\frac{2}{5}$, y la respuesta al problema es$\frac{1}{5}$. □

Para estudiar este y otros casos los matemáticos recurrimos a árboles de sucesos. Cada rama indica un resultado posible. El ejemplo anterior se podría dibujar así:



El árbol puede resultarnos útil también para sumar distintas ramas.

Ejemplo resuelto. En una urna hay 3 bolas blancas y 3 negras. Sacamos una bola, luego otra. Halla la probabilidad de que las bolas sean de colores distintos.

Solución. En el árbol anterior necesitamos las dos ramas del medio. La probabilidad que buscamos será $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$. □

Problema 2. De una baraja de 52 cartas se sacan 4. Halla la probabilidad de que sean del mismo palo.

Solución. Después de sacar la primera quedan 51 cartas y 12 del mismo palo. Si esta segunda es del mismo palo, quedan 50 cartas y 11 del mismo palo, luego 49 y 10 del mismo palo. La probabilidad final es $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{49 \cdot 50 \cdot 51} \approx 0,01$ □

Sucesos complementarios

Caballero blanco: Cuando canto esta canción todos lloran o...
Alicia: ¿O qué?
Caballero blanco: O no lloran, naturalmente.

Tertium non datur es un principio lógico que afirma que o bien ocurre un suceso o bien ocurre lo contrario. Esta mañana o me he tomado un café o no, no vale considerar opciones intermedias (aunque hayan entrado un par de moléculas de café en mi cuerpo debo considerarlo como que sí me lo he tomado). Traduciendo este principio al lenguaje matemático tenemos

$$A \cup \overline{A} = Verdad, Prob(A) + Prob(\overline{A}) = 1$$

donde con $\overline{A}$ se detona el suceso contrario al suceso A.

Trabajar con sucesos complementarios a menudo es más cómodo.

Ejemplo resuelto. Busquemos la probabilidad de que en 3 lanzamientos de dado salgan números distintos.

Solución. Para esto, el segundo lanzamiento no tiene que coincidir con el primero, y el tercero, ni con el primero ni con el segundo. Por tanto, si N_i es el resultado del lanzamiento número i, nuestra probabilidad es producto de dos:

$$P(3\ distintos) = P(N_1 \neq N_2) \cdot P(N_3 \neq N_2 \cup N_3 \neq N_1) = (1 - \frac{1}{6}) \cdot (1 - \frac{2}{6}) = \frac{5}{9}. \quad \square$$

En realidad, *tertium non datur* es un caso particular de otro principio más global. Para formularlo necesitamos una nueva definición:

Definición 2. Un conjunto de sucesos A_i forma una **partición** del espacio muestral si son incompatibles de dos en dos (es decir, si $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) y su unión cubre todo el espacio muestral,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = Espacio\ muestral$$

Aquí va unos ejemplos:

1. Un suceso y su complementario claramente forman una partición porque

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = E.$$

2. Las seis caras de un dado forman una partición del espacio muestral en 6 sucesos incompatibles.

Ahora ya podemos formular nuestro principio general:

Teorema 2. *Si los sucesos A_i forman una partición del espacio muestral,*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

es decir, la suma de sus probabilidades es igual a 1.

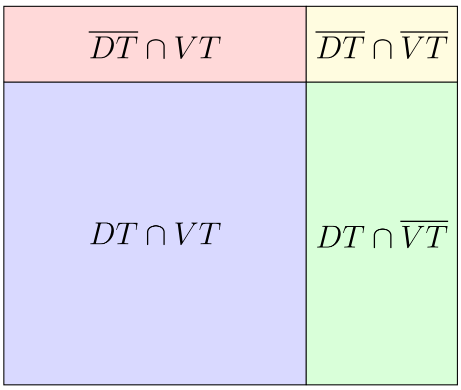
En realidad, podemos hacer una partición de cualquier suceso en base a la partición del espacio muestral. Por ejemplo, sabemos que Donald Trump o se toma un café por la mañana o no. Si llamamos DT el suceso de que Trump se tome su café por la mañana, la pareja de sucesos $DT, \overline{DT}$ forman una partición del espacio muestral. Ahora puedo intersecar cualquier otro suceso con esta partición.

Llamemos $VTarde$ el suceso de que Valeria llegue tarde al cole. Si llega tarde, puede ser el día que Donald Trump se va a tomar un café o el día que no. Entonces,la pareja de sucesos $DT, \overline{DT}$ forman una partición del suceso $VTarde$:

$$VTarde = (VTarde \cap DT) \cup (VTarde \cap \overline{DT})$$

Por ejemplo, si Trump desayuna con un café 4 de cada 5 mañanas y Valeria llega tarde 2 de cada 3 días,

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}.$$



Esto nos lleva a formular el teorema de la probabilidad completa:

Teorema 3. *Si los sucesos A_i forman una partición del espacio muestral, para cualqueir suceso B se cumple*

$$P(B) = \sum_{i} P(B \cap A_i)$$

Es decir, podemos descomponer cada suceso en suma de intersecciones con los sucesos de la partición.

Problema 3. ¿Cuál es el complementario del suceso “en dos lanzamientos de moneda salen 2 caras”? Nómbralo sin usar la palabra ”no”.

Solución. En dos lanzamientos de moneda sale una cara o ninguna. $\square$

Problema 4. ¿Cuál es el complementario del suceso “en dos lanzamientos de moneda sale al menos una cara”?

Solución. En dos lanzamientos de moneda no sale ninguna cara. $\square$

Al menos

Supongamos que queremos hallar la probabilidad de que salga al menos un 6 en tres lanzamientos. Por supuesto, podemos representar el espacio muestral como un cubo de $6 \times 6 \times 6$ y calcular la cantidad de cubitos en todas las caras que contengan un 6. El problema es que estas caras tienen aristas comunes, que habría que contar una vez, no dos, y el cubito $(6, 6, 6)$, que habría que contar una vez y no tres. Puedes intentar contar esos cubitos mientras me vaya a tomar un café...

Ahora imagínate que te pido que halles la probabilidad de que salga al menos un 6 en 10 lanzamientos. ¡Manos a la obra! Imagínate un cubo 10-dimensional... ¡Noooo! ¡No podemos hacerlo!

Usaremos un truco: siempre que nos pidan hallar la probabilidad de que un suceso ocurra al menos 1 vez, buscaremos la probabilidad complementaria, que este evento no ocurra. Por ejemplo, para hallar la probabilidad de que salga un 6 en 3 lanzamientos buscaremos la probabilidad de que no salga ningún 6. Visualmente, corresponde al cubo $5 \times 5 \times 5$ incluido en el cubo grande, lo que corresponde a 125 cubitos de los 216 que hay. Por tanto, la probabilidad que buscamos es

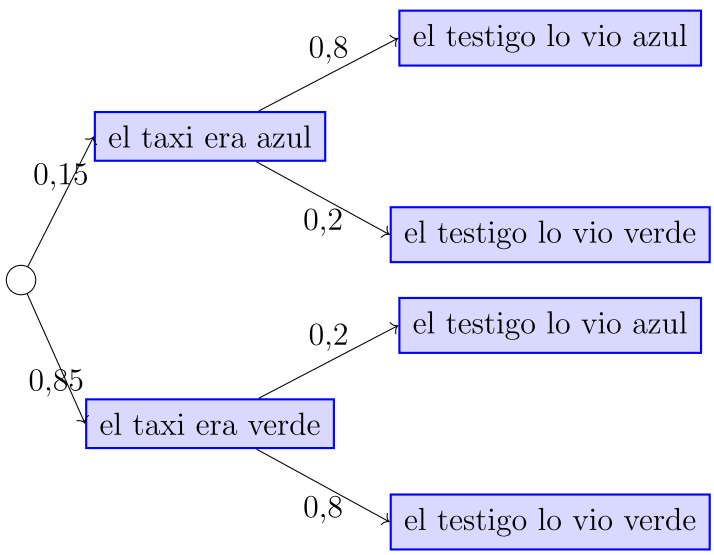
$$P(\textit{al menos un } 6) = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$$

Podríamos también haber recurrido a la regla del producto:

$$P(\textit{sin } 6 \textit{ en } 3 \textit{ lanzamientos}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow P(\textit{al menos un } 6) = 1 - \frac{125}{216}$$

Probabilidad condicional

Un taxi atropelló a una señora y se fue. En esa pequeña ciudad norteamericana había 2 compañías de taxis: El Taxi Verde y El Taxi Azul, la primera compañía contaba con 85 taxis verdes y la segunda, con 15 azules. El único testigo que vio el accidente dijo que era azul. Según las investigaciones ese testigo era capaz de distinguir el color del coche de noche en un 80% de los casos. Los jueces, confiando en el testigo, condenaron al taxista de un taxi azul que se encontraba cerca del lugar del accidente. Pero... ¿cuál realmente era la probabilidad de que el taxi fuera azul? Haremos un árbol de sucesos.



Como sabemos que el testigo vio un taxi azul, nos interesan la primera rama (el taxi era azul y así lo vio el testigo) y la tercera (el taxi era verde pero el testigo se equivocó y le pareció que era azul). Calculemos las probabilidades:

$$P(era\ verde) = 0,85 \cdot 0,2 = 0,17$$

$$P(era\ azul) = 0,15 \cdot 0,8 = 0,12$$

Para nuestra sorpresa ¡resulta bastante más probable que el taxi en realidad era verde! Esta probabilidad se puede calcular no basándonos en el 100% de los casos totales, sino en estas dos ramas del árbol, que sabemos que son las únicas que tienen sentido (porque el testigo no vio el taxi verde).

$$P(era\ verde\ aunque\ lo\ vieron\ azul) = \frac{0,17}{0,17+0,12} = \frac{17}{29} \approx 59\%$$

Este hecho sorprendente se debe a que había muchísimos más taxis verdes que azules, por lo que la probabilidad de que - a priori - el taxi fuese azul era muy baja. De hecho, cuando se revisó el caso, descubrieron al auténtico autor del atropello, había conducido un taxi verde.

Esta probabilidad que hemos calculado se llama la probabilidad condicional. En vez de considerar todo el espacio muestral (las 4 ramas del árbol) hemos visto una parte suya, un subconjunto que satisface la condición "el testigo vio el taxi azul". Por esto hemos dividido los sucesos favorables entre la suma de las probabilidades de dos ramas, no cuatro.

Definición 3. La **probabilidad condicional** del suceso A en condición H se denota $P(A|H)$ y se mide en el subconjunto del espacio muestral que satisface la condición.

Veamos otro ejemplo. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. A nivel práctico, si paro a un alumno de este centro y le pregunto si juega al fútbol, con la probabilidad de un medio me dirá que sí.

Por otro lado, si voy a un entrenamiento de baloncesto y empiezo a preguntar si juegan al fútbol, la respuesta mayoritaria será que no. Es natural: entre los jugadores de baloncesto muy pocos juegan también al fútbol. De hecho, podemos calcularlo: si los que juegan al baloncesto son un 25%, y los que practican ambos deportes, un 5%, el porcentaje de jugadores de fútbol **entre los jugadores de baloncesto** será un $\frac{5}{25} = 20\%$, es decir, solamente uno de cada cinco me dirá que juega al fútbol.

Como ves, la diferencia entre la probabilidad total y la condicional, es el espacio muestral. La probabilidad total se calcula respecto al total (en este caso, el total de alumnos del centro), mientras que la condicional se calcula respecto a un subconjunto (los alumnos que juegan al baloncesto).

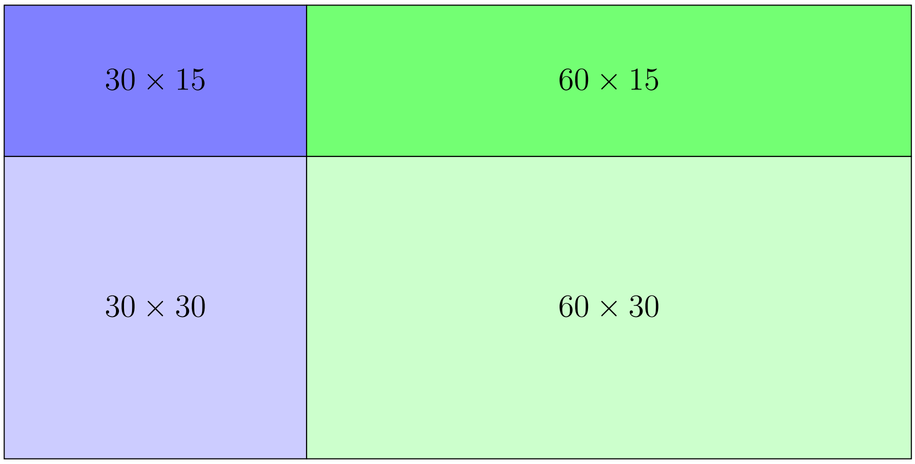
Podemos calcular la probabilidad condicional usando árboles, pero también podemos recurrir a una fórmula extremadamente útil, que se llama el **teorema de Bayes**:

Teorema 4.

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

Volviendo a nuestro ejemplo del fútbol, $P(H) = 0,25$ (la probabilidad de jugar al baloncesto), $P(A \cap H) = 0,05$ (la probabilidad de jugar al fútbol y al baloncesto), por lo que $P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0,2$ (la probabilidad de jugar al fútbol con la condición de que el alumno juega al baloncesto).

Problema 5. Guille tiene en su habitación un corcho que a veces usa para lanzar dardos, y ¡siempre acierta! El corcho es un rectángulo de 90cm de ancho y 45cm de alto, y está dividido en cuatro regiones, como se aprecia en el dibujo:



Halla las siguientes probabilidades:

1. P(dar en la región azul)
2. P(dar en la región azul claro)
3. P(dar en la región azul claro sabiendo que he dado en la región azul)
4. P (dar en la región verde oscuro sabiendo que no he dado en la zona azul claro)

Solución. 1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{2}{9}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $\frac{2}{7}$

□

Probabilidad total

Supongamos que tenemos una partición A_i del espacio muestral y un suceso B. Entonces, descomponiendo el suceso B tenemos

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$$

Ahora expresaremos cada una de las intersecciones usando el teorema de Bayes:

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Esta es la fórmula de la probabilidad total.

Problema 6. Cuatro personas A, B, C y D están esperando en la cola del médico. Busca la probabilidad de que

1. Primero atiendan a A sabiendo que B es el último en llegar
2. Primero atiendan a A sabiendo que A NO es el último en llegar
3. Primero atiendan a A sabiendo que B NO es el último en llegar
4. Primero atiendan a A sabiendo que B va después
5. Atiendan a A antes que a B sabiendo que C va después de A

Proof. En todos estos problemas el espacio muestral completo de $4! = 24$ permutaciones está incompleto debido a la condición que imponemos.

1. Tenemos que fijarnos en los tres primeros, hay 6 combinaciones de las que nos interesan 2. Respuesta: $\frac{1}{3}$
2. Hay que excluir 6 casos en los que A es el último de los $4! = 24$ que hay. En los restantes 18 casos A es el primero en 6. Respuesta: $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
3. Otra vez tenemos 18 casos, pero en estos casos A es el primero solamente en 4 (porque era primero en 2 casos de los 6 exluidos). Respuesta: $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$
4. C va después de A exactamente en la mitad de los casos, por lo que son 12. Colocados por orden A y C crean 3 "huecos" para colocar a B, delante, en el medio y detrás: BAC, ABC, ACB. Esto significa que B está delante en un caso de tres. Cada uno de estos 3 casos admite 4 colocaciones de D, pero en el fondo no nos importa: ya sabemos que nuestra probabilidad es $\frac{2}{3}$.

□

Sucesos independientes

Hemos definido dos sucesos como independientes si la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro. Ahora podemos reformular esta definición en términos de la probabilidad condicional:

Definición 4. Los sucesos A, B se llaman **independientes** si $P(A|B) = P(A)$.

Ejemplo resuelto. Vamos a demostrar que si en el primer lanzamiento de dado ha salido un 6, este resultado no influye en la probabilidad de sacar un 6 en el segundo lanzamiento.

$$P(6 \ en \ seg|6 \ en \ prim) = \frac{P(6 \ en \ seg \cap 6 \ en \ prim)}{P(6 \ en \ prim)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Como $P(6 \ en \ seg|6 \ en \ prim) = P(6 \ en \ seg)$, los sucesos son independientes.

Es fácil demostrar ahora el criterio de independencia que hemos visto antes:

$$A \ y \ B \ independientes \longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Proof.

$$A \ y \ B \ independientes \longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Pero como $P(A|B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ □

La probabilidad y la idea de los sucesos independientes a menudo nos ayudan a solucionar problemas que pueden parecer complicados.

Ejemplo resuelto. Un sábado un grupo de ornitólogos atrapó 40 pájaros de la reserva y los anilló. Al día siguiente atraparon 50 pájaros, y entre ellos había 18 anillados. ¿Podemos estimar la cantidad de pájaros en la reserva?

Solución. Si suponemos que los sucesos de "ser atrapado el sábado" y "ser atrapado el domingo" son independientes para cada pájaro, la relación $18 : 50$ tiene que ser igual a $40 : N$, donde N es la cantidad total de pájaros en la reserva. De ahí que esta cantidad sea aproximádamente igual a $\frac{50 \cdot 40}{18} \approx 111$. □

Problema 7. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. Los sucesos A=jugar al fútbol y B=jugar al baloncesto ¿son independientes?

Proof. No. $P(balon \cap fut) = 0,05 \neq P(bal)P(fut) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$ □

Ejercicios

Problema 8. En clase hay 25 niños. La profesora elige a 2 encargados aleatoriamente. La probabilidad de que ambos sean niñas es $\frac{3}{25}$. ¿Cuántas niñas hay en esta clase?

Solución. Supongamos que hay n niñas. Entonces, la cantidad de parejas de niñas es $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. La cantidad de parejas de niños y niñas es $\binom{25}{2} = \frac{25\cdot 24}{2}$. De ahí que

$$\frac{n(n-1)}{25\cdot 24} = \frac{3}{25}$$

Esta ecuación tiene una única solución positiva, $n = 9$.

□

Solución. La probabilidad de que las letras vayan apareciendo por orden es $\frac{1}{3!}$. La de que los números vayan por orden es $\frac{1}{4!}$. Como estos sucesos son independientes, la probabilidad final es igual a $\frac{1}{3!\cdot 4!}$.

□

Problema 9. Un alumno suspende mates con la probabilidad de $\frac{2}{3}$, suspende lengua con la probabilidad de $\frac{2}{3}$. Sabiendo que siempre suspende al menos una de estas asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido ambas?

Solución.

$$P(Lengua \cap Mates) = P(Lengua) + P(Mates) - P(Lengua \cup Mates)$$

$$P(Lengua \cap Mates) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{12}$$

□

Problema 10. En el plano se dibujan 7 puntos no colineares. Juan elige al azar 3 puntos, Javier, otros 3. ¿Cuál es la probabilidad de que sus triángulos no tengan vértices comunes?

Solución. El espacio muestral para Javier es $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}$, la cantidad de maneras de elegir 3 elementos entre 7. De entre estos 7 puntos 3 ya están "reservados", por lo que le quedan 4 puntos libres. La probabilidad que buscamos, por tanto, es

$$P = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$$

□

Problema 11. En una habitación hay tres cómodas, cada una con dos cajones. En la primera cómoda hay 2 monedas de plata, en la segunda, una de plata y una de oro, y en la tercera, dos monedas de oro, pero no sabemos cuál es cuál. Yo abro un cajón y encuentro una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar en el otro cajón de la cómoda una moneda de oro?

Solución. Si has empezado pensar en cómodas, tu respuesta con toda seguridad es un medio. Pero piensa que no estamos eligiendo cómodas sino cajones. Entonces hay 3 casos, no 2. En dos de ellos, el otro cajón de la misma cómoda tiene una moneda de oro, por lo que la respuesta correcta es $\frac{2}{3}$.

□

Problema 12. Ana y Javier tienen dos hijos. Se sabe que Ana tiene al menos un hijo varón y que el hijo mayor de Javier es varón. ¿Es más probable que Ana tenga dos hijos varones o que Javier tenga dos hijos varones?

Solución. Aunque ambas probabilidades parecen iguales no lo son porque parten de distinto espacio muestral. En el caso de Ana el espacio muestral está formado por 3 opciones distintas:

$$\{(\text{chico}, \text{chica}), (\text{chica}, \text{chico}), (\text{chico}, \text{chico})\}$$

, en cambio, el de Javier solamente incluye dos:

$$\{(\text{chico}, \text{chica}), (\text{chico}, \text{chico})\}$$

Por tanto, la probabilidad de tener dos hijos varones es mayor para Javier: $\frac{1}{2}$ frente a $\frac{1}{3}$ para Ana.

□

Solución. $\frac{3}{4}$. El espacio muestral es tridimensional, en cada dimensión hay 2 opciones (izquierda o derecha). De las $2^3 = 8$ opciones totales las desfavorables son 2: cuando las tres hormigas eligen la misma dirección.

□

Problema 13. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. Los sucesos A=jugar al fútbol y B=jugar al baloncesto ¿son independientes?

Solución. No. $P(balon \cap fut) = 0,05 \neq P(bal)P(fut) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$

□

Problema 14. Demuestra que si A, B son independientes, también lo son $A, \overline{B}$

Solución.

$$P(A) = P(A)(P(B) + P(\overline{B})) = P(A \cap B) + P(A)P(\overline{B})$$

Por otro lado,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Comparando estas identidades demostramos el enunciado.

□

Problema 15. De cada 7 filósofos hay 1 matemático, y de cada 5 matemáticos uno es filósofo. ¿Hay más filósofos o matemáticos?

Solución. Reformulando el enunciado, sabemos que $P(Fil|Mat) = \frac{1}{5}$, $P(Mat|Fil) = \frac{1}{7}$. Aplicando la fórmula de Bayes vemos que

$$P(Mat \cap Fil) = P(Mat) \cdot P(Fil|Mat) = P(Fil) \cdot P(Mat|Fil)$$

De ahí que la probabilidad de ser matemático sea $5 \cdot P(Mat \cap Fil)$, menor que la de ser filósofo $(7 \cdot P(Mat \cap Fil))$.

□

Problema 16. ¿Qué es más probable, que en 3 lanzamientos de dado salga un 6 o que no salga ninguno?

Solución. La probabilidad de que no salga ningún 6 es $(\frac{5}{6})^3 = \frac{125}{216}$. Es ligeramente superior a un medio, por lo que es más probable que no salga ningún 6.

Podríamos pensar que en 6 lanzamientos debería salir un 6. Este 6 o sale en los 3 primeros o en los 3 últimos. La probabilidad de que salga en los 3 primeros es un medio. ¿Por qué es incorrecta esta reflexión?

Aquí partimos de la suposición errónea de que en 6 lanzamientos debe salir exactamente un 6. Algunos números pueden repetirse, incluido el 6. Es importante aprender a detectar planteamientos erróneos, sobre todo, en la Teoría de probabilidad, donde son muy frecuentes.

□

Problema 17. Tenemos dos dados. ¿Es posible escribir en sus caras números naturales de tal manera que la suma de sus resultados tome valores aleatorios de 0 a 35 con la misma probabilidad?

Solución. Sí, se trata de recurrir al sistema de numeración en base 6. En el primer dado escribimos las unidades (0, 1, 2, 3, 4, 5) y en el segundo, las "seisenas" (0, 6, 12, 18, 24, 30).

□

Problema 18. El Rey ofrece al prisionero 10 bolas negras, 10 blancas y 2 cajas. Tiene que repartir TODAS las bolas entre dos cajas. Luego el rey elegirá una caja al azar y sacará una bola. Si es negra, el prisionero morirá, si es blanca, será liberado. ¿Puede el prisionero mejorar su suerte?

Solución. Sí. Si coloca una bola blanca en una caja y todas las demás en la otra, la probabilidad de sobrevivir será $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{27}{38}$.

Es algo más difícil demostrar que esta opción es la mejor, para ello se debería dejar k bolas blancas y n bolas negras en la primera caja y maximizar la probabilidad usando la derivada. Pero es sencillo ver que al colocar al menos una bola negra junto con la blanca reduce significativamente la probabilidad de sobrevivir y que colocando varias blancas y una negra es peor que dejar una blanca.

□

Solución. Después de sacar la primera quedan 51 cartas y 12 del mismo palo. Si esta segunda es del mismo palo, quedan 50 cartas y 11 del mismo palo, luego 49 y 10 del mismo palo. La probabilidad final es $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{49 \cdot 50 \cdot 51} \approx 0,01$

□

Problema 19. Cuando empieza el embarque, el pasajero loco embarca primero y ocupa un asiento aleatorio. Cuando un pasajero (P_1) que tenía este asiento reservado le pide amablemente que se vaya, el pasajero loco se niega rotundamente, de modo que el pobre P_1 se levanta de hombros y se sienta en el primer asiento que le parezca adecuado. Cuando llega el pasajero que debe sentarse en este último asiento, el P_1 le cuenta la historia y dice que no se va a mover de su sitio, de modo que el pobre pasajero P_2 se busca un asiento vacío, y así hasta que el avión se llena. ¿Con qué probabilidad el último pasajero en llegar ocupará su propio asiento? El avión tiene n asientos en total.

Solución. Cambiemos un poco el planteamiento. Supongamos que los pasajeros de este avión eran tozudos y, en vez de marcharse, explulsaban al pasajero loco de sus asientos. Ahora el único que deambula por el avión es el pasajero loco. Sea cual sea su trayectoria, cuando se hayan sentado todos menos el último, en el avión quedarán dos asientos libres, el suyo y el del último pasajero. Ocupará uno de ellos con la misma probabiidad de un medio. Con esta misma probabilidad el último en llegar ocupará su propio asiento.

Es fácil ver que nuestro cambio de planteamiento no afecta al resultado. Se puede reformular así: se elige un asiento al azar hasta que coincida con el asiento del último pasajero o con el del pasajero loco. Ambos sucesos son equiprobables.

□

Problema 20. Tenemos tres dados no convencionales, con números entre 1 y 9, cada uno repetido dos veces. Yo elijo un dado, tú eliges otro. Luego cada uno lanza su dado. Gana el que obtiene mayor puntuación. ¿Serías capaz de inventar 3 dados con estas características que te permitan obtener más victorias en una larga serie de partidas?

Solución. Estos dados existen. Un ejemplo podría ser:

$$Dado\ A : \{2,2,4,4,9,9\}\,, Dado\ B : \{1,1,6,6,8,8\}\,, Dado\ C : \{3,3,5,5,7,7\}$$

El dado B gana al A con la probabilidad $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)$, por lo que el A gana al B con probabilidad $\frac{5}{9}$. El B gana al C con probabilidad $\frac{5}{9}$ y el C gana al A con probabilidad $\frac{5}{9}$ también.

□

Problema 21. Delante de ti hay tres puertas. Detrás están escondidos dos cabras y un coche. Después de elegir una puerta, el presentador, para facilitarte la tarea, abre una puerta distinta de la que has elegido tú y te muestra que detrás hay una cabra. Quedan dos puertas cerradas, una cabra y un coche detrás. ¿Es mejor seguir optando por la puerta que has elegido inicialmente, cambiar de puerta o da exactamente igual?

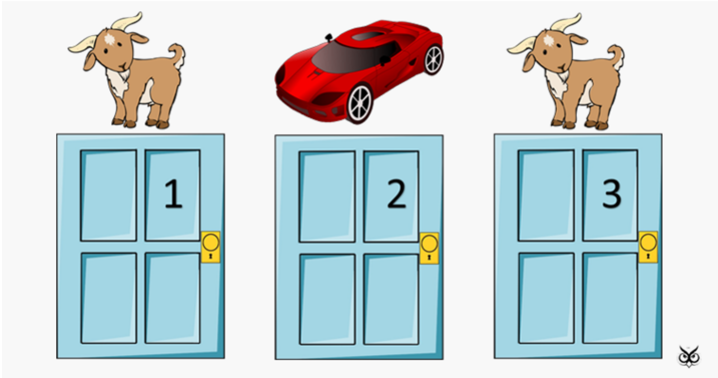


Figure 1: El concurso de Monty Hall

Solución. Es mejor cambiar de puerta. Piensa que inicialmente la probabilidad de acertar es $\frac{1}{3}$, y esta probabilidad no ha cambiado con las acciones del presentador. Por eso la probabilidad de ganar cambiando de puerta es $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ¡el doble!

Si no te convence, supón que has elegido la puerta número 1. Si el coche realmente está detrás, ganas. Pero si no, tanto si el coche está detrás de la 2 como si está detrás de la 3, ¡ganas al cambiar de puerta! En 2 casos de 3 es mejor cambiar que seguir.

□

Problema 22. En este juego se pone un sombrero azul o rojo a dos participantes, completamente al azar, de manera que ven el del compañero pero no el suyo. Simultáneamente dirán un color. Si ambos aciertan el color de su propio sombrero, ganan 100 €, si al menos uno se equivoca, pierden 80€. ¿Existe alguna estrategia para hacer este juego rentable? ¿Y si son tres participantes y ganan sólo si aciertan los tres?

Solución. Si juegan dos, el espacio muestral son 4 opciones: $(rojo, rojo)$, $(rojo, azul)$, $(azul, rojo)$, $(azul, azul)$. Si ambos tratasen de adivinar el color de su propio sombrero, la probabilidad de ganar sería $\frac{1}{4}$, y no merecería la pena jugar. Sin embargo, si ambos dijesen el color del sombrero del otro, intentando adivinar el suyo propio, ¡la probabilidad de ganar llegaría a ¡$\frac{1}{2}$! Ganarían si los sombreros tuviesen el mismo color (rojo-rojo o azul-azul), es decir, en la mitad de los casos.

Curiosamente, se puede inventar una estrategia que llegaría al 50% del éxito incluso para 3 jugadores. Por ejemplo, si los participantes dicen "rojo" cuando ven dos sombreros azules o dos rojos, y "azul" si ven dos sombreros de colores distintos, ganarán en 4 de los 8 casos posibles (si los tres son rojos o si hay un sombrero rojo).

□

Problema 23. Adrián y Belén tienen una moneda trucada que cuando la tiras al aire tiene probabilidad $\frac{4}{7}$ de salir cara y probabilidad $\frac{3}{7}$ de salir cruz. Juntos juegan al siguiente juego: se van a turnar tirando la moneda, y gana el primero que saque cruz. Si Adrián es el primero en jugar, ¿cuál es la probabilidad de que gane?

Solución. Llamamos p a la probabilidad de que gane Adrián. La probabilidad de que gane Belén es $\frac{4}{7} \cdot p$, porque para que Belén gane se tiene que dar primero que Adrián saque cara en el primer turno (probabilidad $\frac{4}{7}$, y que después de eso jueguen una partida en la que gana el primero (probabilidad p, el primero en este caso es Belén.)

Como siempre gana o Adrián o Belén, tenemos que $p + \frac{4}{7}p = 1$, por lo que $p = \frac{7}{11}$.

□

Problema 24. Tres condenados a muerte se enteran de que uno de ellos ha sido perdonado, y el carcelero sabe quién es. El condenado A le ruega que le revele el nombre del perdonado, pero el carcelero se niega rotundamente. Entonces A le dice: "Si el perdonado es el B, dime que ejecutarán a C, si es C, dime que ejecutarán a B, y si soy doy, tira una moneda y di B o C al azar". El carcelero le anuncia que ejecutarán a B. Muy contento, porque cree que su probabilidad de salvarse ha aumentado, A se lo cuenta a C, el cual también se pone contentísimo. ¿Ha aumentado realmente la probabilidad de salvarse para alguno de ellos (o ambos) con esta noticia?

Solución. Hay 4 casos teóricamente posibles:

1. han perdonado a A y el carcelero dice que ejecutarán a B, la probabilidad es $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$
2. han perdonado a A y el carcelero dice que ejecutarán a C, la probabilidad es $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$
3. han perdonado a B y el carcelero dice que ejecutarán a C, la probabilidad es $P = \frac{1}{3}$
4. han perdonado a C y el carcelero dice que ejecutarán a B, la probabilidad es $P = \frac{1}{3}$

Como sabemos que el carcelero ha dicho que ejecutarán a B, la probabilidad condicional de que ejecuten a A y a C ahora es

$$P_A = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$P_C = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

A nivel intuitivo está claro que la probabilidad de salvarse para A no ha cambiado, porque lo único que ha averiguado es que B morirá seguro, lo cual no le aporta nada porque sabía de antemano que uno de sus compañeros iba a morir con toda seguridad. Este mismo argumento explica por qué ha aumentado la probabilidad de sobrevivir para C, ya que ahora $P_C = 1 - P_A$.

□

Problema 25. Sabemos que saber francés aumenta la probabilidad de saber alemán (el porcentaje de personas que saben alemán entre toda la población mundial es menor que este porcentaje entre las personas que hablan francés). ¿Es verdad que saber alemán aumenta la probabilidad de saber francés?

Solución.

$$P(Al|Fr) = \frac{P(Al \cap Fr)}{P(Fr)} \geqslant P(Al) \Rightarrow P(Al \cap Fr) \geqslant P(Fr) \cdot P(Al)$$

Ahora dividiendo entre $P(Al)$ vemos que

$$\frac{P(Al \cap Fr)}{P(Al)} = P(Fr|Al) \geqslant P(Fr)$$

es decir sí, el hecho de saber alemán aumenta la probabilidad de saber francés.

□

Problema 26. En un torneo de ajedrez entre dos personas gana el que haya cosechado primero 6 victorias. Lamentablemente, el torneo se cancela en el momento en que un jugador ha ganado 5 partidas y el otro 3. ¿Cómo hay que dividir el premio? Luca Pacioli pensaba que en relación 5:3, Tartaglia, que 2:1, y Fermat, que 7:1. ¿Qué opinas tú?

Solución. Como el torneo no terminó, el planteamiento más plausible es pensar en la **probabilidad** de que lo hubiera ganado uno de los jugadores. Para que lo ganase el jugador que llevaba solamente 3 victorias, debería haber ganado 3 partidas consecutivas. Como no sabemos el ranking de cada jugador, tenemos dos estrategias. La primera, es considerar que ganan igual de bien. En este caso, el jugador que llevaba menos victorias habría ganado el torneo con la probabilidad de $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, por lo que su rival lo hubiera ganado con la probabilidad de $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. En este caso, la opción de Fermat sería la más correcta.

Sin embargo, si suponemos que la probabilidad de ganar para el segundo jugador es $\frac{3}{8}$, ya que de 8 partidas que no terminaron en tablas ganó 3, la respuesta sería $(\frac{3}{8})^3 = \frac{27}{512} \approx 5\%$. Pensando así, se debería repartir el premio en relación $19 : 1$.

□

Problema 27. En un colegio el 30% toca algún instrumento musical, pero entre los chicos son solo el 15%. De cada 5 alumnos 3 son chicas. Si vemos a alguien ensayando, ¿es más probable que sea chico o chica? ¿Con qué probabilidad?

Solución. Está claro que hay más chicas músicas que chicos músicos, nos lo dice la experiencia vital y el enunciado de este problema. Ahora bien,

$$P(chica|tocar) = \frac{P(chica \cap tocar)}{P(tocar)}$$

La probabilidad de ser chica y tocar un instrumento se puede obtener de la fórmula de la probabilidad total (chicos y chicas forman una partición):

$$P(tocar) = P(tocar|chica) \cdot P(chica) + P(tocar|chico) \cdot P(chico)$$

Sustituyendo los valores tenemos

$$0,3 = P(tocar|chica) \cdot 0,6 + 0,15 \cdot 0,4$$

de ahí que $P(tocar|chica) = 0,4$. Como

$$P(tocar|chica) = \frac{P(chica \cap tocar)}{P(chica)}$$

$$P(chica \cap tocar) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$$

Ahora podemos hallar la probabilidad que buscábamos:

$$P(chica|tocar) = \frac{P(chica \cap tocar)}{P(tocar)} = \frac{0,24}{0,3} = \frac{5}{6}$$

□

Problema 28. Acabas de hacerte un análisis que detecta el bobovirus, una peligrosísima enfermedad terminal, y ¡QUÉ HORROR! te ha dado positivo...

Sabes que el bobovirus afecta al 0,1% de la población, y que el test a veces falla... En un 10% de los casos da negativo cuando la persona está infectada, y en un 20% de los casos, da un falso positivo. ¿Con qué probabilidad estás realmente infectado?

Solución. El test puede dar positivo en dos casos: si estás infectado y el test ha funcionado bien, o si no estás infectado y era un falso positivo:

$$P(test\ pos) = P(test\ pos|inf) \cdot P(inf) + P(test\ pos|no\ inf) \cdot P(no\ inf)$$

$$P(test\ pos) = 0,9 \cdot 0,001 + 0,8 \cdot 0,999 = 0,8001$$

Este es el espacio muestral condicional. Dentro de él nos interesa la primera parte (estar infectado). Esta probabilidad es

$$P(inf|test\ pos) = \frac{P(inf \cap pos)}{P(test\ pos)} = \frac{P(test\ pos|inf) \cdot P(inf)}{P(test\ pos)}$$

$$P(inf|test\ pos) = \frac{0,0009}{0,8001} \approx 0,01\%$$

Puedes estar tranquilo.

□

Problema 29. En el tablero de 3×3 colocan 4 cruces de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que formen un 3 en raya?

Solución. En total existen $\binom{9}{4}$ combinaciones de 4 cruces en este tablero. Hay 8 tres-en-raya posibles: 3 filas, 3 columnas y 2 diagonales. Para cada uno de estos tres-en-raya existen 6 casillas vacías donde se pueda colocar la cuarta cruz. En total, la probabilidad de que se forme un 3 en raya es, por lo tanto,

$$\frac{8 \cdot 6}{\binom{9}{4}} = \frac{8}{21}$$

□

Problema 30. Se lanza el dado 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que los números vayan apareciendo por orden, de menor a mayor?

Solución. Si en el primer dado ha salido un 4, un 5 o un 6, ya no puede cumplirse la condición. Si en el primero ha salido un 3, en el segundo tiene que salir un 4, en el tercero, un 5, y en el último, un 6, es decir, tenemos un único caso.

Si en el primer dado ha salido un 2, tenemos 4 órdenes posibles:

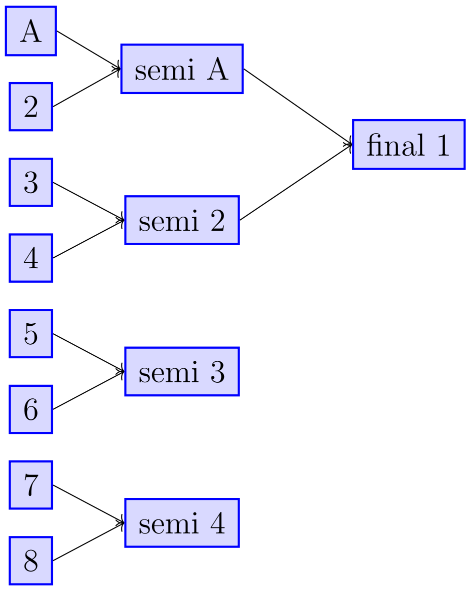
$$(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6)$$

Por último, si el primer resultado es un 1, hay $\binom{5}{3} = 10$ opciones de elegir 3 números entre $2,3,4,5,6$. La probabilidad final es $\frac{1+4+10}{6^4} \approx 1\%$

□

Problema 31. A los cuartos de final han llegado 8 equipos. Los emparejan de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de estos equipos, A y B, se enfrenten en las semifinales? Suponemos que cada equipo gana con la probabilidad de un medio.

Solución. En los cuartos de final hay 4 parejas de equipos. Para llegar a la semifinal junto con el equipo A hay que entrar en el grupo "semi 2" (con la probabilidad de $\frac{2}{7}$ porque, además de A, hay $8-1=7$ equipos) y, además, ambos equipos tienen que ganar a su rival. La probabilidad final es $\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{14}$



□

Problema 32. Sabemos que $P(A\cap B) \leqslant 0,9, P(A\cap C) \leqslant 0,9$. ¿Es verdad que $P(A|B\cap C) \leqslant 0,9$?

Solución. Hay que demostrar que

$$P(A|B\cap C) \geqslant 0,9 \Leftrightarrow P(A\cap B\cap C) \geqslant 0,9P(B\cap C)$$

Llamemos $Q = P(A\cap B), R = P(B\cap C), S = P(A\cap B\cap C) = kR$. Tenemos

$$Q+S \geqslant 0,9, Q+R \leqslant 0,1 \Rightarrow S-R = (k-1)R \geqslant 0,8$$

Pero $R \leqslant 0,1 \Rightarrow \frac{1}{R} \geqslant 10$, multiplicando estas dos últimas desigualdades obtenemos

$$(k-1)R\cdot\frac{1}{R} \geqslant 0,8\cdot 10$$

De ahí que

$$k \geqslant 9, S \geqslant 9R, S \geqslant 0,9\cdot(S+R)$$

lo que demuestra la afirmación.

□

Problema 33. En la antigua India cuando dos enamorados de familias enfrentadas querían casarse, tenían que demostrar que su amor era verdadero de la siguiente manera: un juez entrelazaba unas cuantas hebras dejando entrever solamente sus extremos. Los enamorados tenían que atar cada uno de los extremos superiores con uno de los extremos inferiores, si se formaba un único lazo, les permitían casarse, si no, no. Calcula la probabilidad de poder casarse para 3 hebras, n hebras.

Solución. Si nombramos los extremos de arriba y los de abajo con números de 1 a n, cada entrelazamiento de hebras produce una permutación de estos números. Se va a formar un único enlace si la permutación es un ciclo completo en la que ninguna hebra se enlaza consigo misma.

Supongamos que el juez enlaza el extremo de arriba de la hebra 1 con el de abajo de la $h_1 \neq 1$. Esto se puede hacer de $n-1$ maneras. Entonces el extremo de arriba de la hebra h_1 no se puede enlazar ni con 1 ni con h_1, ni tampoco con h_2 ($n-2$ maneras). Siguiendo este razonamiento, vemos que hay $(n-1)!$ maneras de crear un único enlace entre las $n!$ permutaciones posibles. Por tanto, la probabilidad de que los enamorados se casen es $\frac{1}{n}$.

□

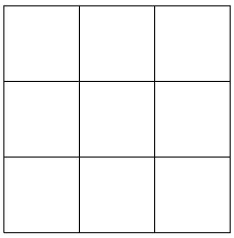
Problema 34. Dos vaqueros, Jim y John están jugando a la ruleta rusa. En su revólver de 6 balas hay una bala cargada. Jim empieza. ¿Cuál es la probabilidad de que muera él?

Solución. La probabilidad de que muera después del primer disparo es $\frac{1}{6}$. Para morirse con el tercer disparo, tiene que haber 2 fallos primero, por lo que es igual a $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Siguiendo este razonamiento, la probabilidad de la muerte de Jim después de k tiros de John es $(\frac{5}{6})^{2k} \cdot \frac{1}{6}$. Es fácil ver que la muerte de Jim ocurre con la probabilidad de

$$\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{5}{6})^{2i} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

□

Problema 35. La hormiga Miga se desplaza por los lados de esta cuadrícula:



Cuando llega a un vértice V, elige el siguiente vértice al que desplazarse con igual probabilidad entre todos los vértices adyacentes (horizontal o verticalmente) a V en la cuadrícula. Para cada vértice de la cuadrícula, determina la probabilidad de que, partiendo de ese vértice, la hormiga Miga llegue antes a la esquina de abajo a la izquierda que a la esquina de arriba a la derecha.

Solución. Llamamos p, q y r a las probabilidades correspondientes a los siguientes vértices

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & r & \bullet & \bullet \\ \bullet & p & q & \bullet \end{array}$$

Por la simetría del problema, las probabilidades correspondientes a todos los vértices son

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 1-q & 1-p & 0 \\ q & \frac{1}{2} & 1-r & 1-p \\ p & r & \frac{1}{2} & 1-q \\ 1 & p & q & \frac{1}{2} \end{array}$$

Cada vértice correspondiente a la probabilidad q tiene 3 vértices adyacentes de probabilidades $1/2, 1/2$ y p, por lo que

$$q = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + p\right) = \frac{p+1}{3}.$$

El vértice correspondiente a la probabilidad r tiene 4 vértices adyacentes de probabilidades $1/2, 1/2$, p y p, por lo que

$$r = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + p + p\right) = \frac{2p+1}{4}.$$

Cada vértice correspondiente a la probabilidad p tiene 3 vértices adyacentes de probabilidades $1, r$, y q, por lo que

$$p = \frac{1}{3}(1 + r + q) = \frac{1 + \frac{2p+1}{4} + \frac{p+1}{3}}{3} = \frac{19 + 10p}{36}.$$

Por tanto, $p = \frac{19}{26}$, $q = \frac{19+26}{26 \cdot 3} = \frac{15}{26}$, y $r = \frac{2\frac{19}{26}+1}{4} = \frac{19+13}{4 \cdot 13} = \frac{8}{13}$. Así, las probabilidades correspondientes a todos los vértices son:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{11}{26} & \frac{7}{26} & 0 \\ \frac{15}{26} & \frac{1}{2} & \frac{5}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{19}{26} & \frac{8}{13} & \frac{1}{2} & \frac{11}{26} \\ 1 & \frac{19}{26} & \frac{15}{26} & \frac{1}{2} \end{array}$$

□

Problema 36. Sara tiene 3 euros y hace una serie de apuestas. Las apuestas son independientes, y para cualquiera de las apuestas que hace, tiene una probabilidad p de perderla. Por cada apuesta que gana, Sara gana 1 euro, y por cada una que pierde, pierde 1 euro. Sara para de apostar cuando llega a tener 6 euros o cuando se queda sin dinero. Calcula (con demostración) la probabilidad de que Sara se quede sin dinero.

Solución. Sea d_n la diferencia entre el número de apuestas perdidas y ganadas pasadas n apuestas. La siguiente tabla muestra las probabilidades de que ocurran los siguientes valores de d_n para los primeros valores de n:

	$d_n = -3$	$d_n = -2$	$d_n = -1$	$d_n = 0$	$d_n = 1$	$d_n = 2$	$d_n = 3$
$n = 1$	0	0	$(1-p)$	0	p	0	0
$n = 2$	0	$(1-p)^2$	0	$2(1-p)p$	0	p^2	0
$n = 3$	$(1-p)^3$	0	$3(1-p)^2p$	0	$3(1-p)p^2$	0	p^3
$n = 4$	0	$3(1-p)^3p$	0	$6(1-p)^2p^2$	0	$3(1-p)p^3$	0
$n = 5$	$3(1-p)^4p$	0	$9(1-p)^3p^2$	0	$9(1-p)^2p^3$	0	$3(1-p)p^4$
$n = 6$	0	$9(1-p)^4p^2$	0	$18(1-p)^3p^3$	0	$9(1-p)^2p^4$	0

En efecto, las distintas filas se obtienen de la fila anterior de esta manera:

- Para $d_n = -3$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = -2$ por $1-p$. Esto es así porque la única manera de llegar a $d_n = -3$ (que Sara tenga 6 euros) es si en la apuesta anterior tenía 5 euros ($d_{n-1} = -2$) y ha ganado la última apuesta (probabilidad $1-p$ de ganarla).

- Para $d_n = -2$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = -1$ por $1-p$. Esto es así porque la única manera de llegar a $d_n = -2$ (que Sara tenga 5 euros) es si en la apuesta anterior tenía 4 euros ($d_{n-1} = -1$) y ha ganado la última apuesta (probabilidad $1-p$ de ganarla).

- Para $d_n = -1$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = 0$ por $1-p$ y sumárselo a la multiplicación de lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = -2$ por p. Esto es así porque las maneras de llegar a $d_n = -1$ (que Sara tenga 4 euros) son que en la apuesta anterior tenía 3 euros ($d_{n-1} = 0$) y ha ganado la última apuesta (probabilidad $1-p$ de ganarla) o que en la apuesta anterior tenía 5 euros ($d_{n-1} = -2$) y ha perdido la última apuesta (probabilidad p de perderla).

- Para $d_n = 0$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = 1$ por $1-p$ y sumárselo a la multiplicación de lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = -1$ por p. Esto es así porque las maneras de llegar a $d_n = 0$ (que Sara tenga 3 euros) son que en la apuesta anterior tenía 2 euros ($d_{n-1} = 1$) y ha ganado la última apuesta (probabilidad $1-p$ de ganarla) o que en la apuesta anterior tenía 4 euros ($d_{n-1} = -1$) y ha perdido la última apuesta (probabilidad p de perderla).

- Para $d_n = 1$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = 2$ por $1-p$ y sumárselo a la multiplicación de lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = 0$ por p. Esto es así porque las maneras de llegar a $d_n = 1$ (que Sara tenga 2 euros) son que en la apuesta anterior tenía 1 euro ($d_{n-1} = 2$) y ha ganado la última apuesta (probabilidad $1-p$ de ganarla) o que en la apuesta anterior tenía 3 euros ($d_{n-1} = 0$) y ha perdido la última apuesta (probabilidad p de perderla).

- Para $d_n = 2$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = 1$ por p. Esto es así porque la única manera de llegar a $d_n = 2$ (que Sara tenga 1 euro) es si en la apuesta anterior tenía 2 euros ($d_{n-1} = 1$) y ha perdido la última apuesta (probabilidad p de perderla).

- Para $d_n = 3$, hay que multiplicar lo que aparece en la casilla $d_{n-1} = 2$ por p. Esto es así porque la única manera de llegar a $d_n = 3$ (que Sara pierda todo su dinero) es si en la apuesta anterior tenía 1 euro ($d_{n-1} = 2$) y ha perdido la última apuesta (probabilidad p de perderla).

Siguiendo estas reglas que hemos justificado, podemos comprobar por inducción que para todo $k \geq 2$, la fila $n = 2k-1$ es

$$\mid 3^{k-2}(1-p)^{k+1}p^{k-2} \mid \quad 0 \mid 3^{k-1}(1-p)^{k}p^{k-1} \mid \quad 0 \mid 3^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{k} \mid \quad 0 \mid 3^{k-2}(1-p)^{k-2}p^{k+1} \mid$$

y la fila $n = 2k$ es

$$\mid \quad 0 \mid 3^{k-1}(1-p)^{k+1}p^{k-1} \mid \quad 0 \mid 2 \cdot 3^{k-1}(1-p)^{k}p^{k} \mid \quad 0 \mid 3^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{k+1} \mid \quad 0 \mid$$

El caso base $k = 2$ ya está hecho. Para el paso de inducción, procedemos de la siguiente manera. La fila $n = 2k$ es la primera de la siguiente tabla por hipótesis de inducción, y tenemos que ver que a partir de ella se obtienen siguiendo los pasos que hemos detallado antes las dos filas siguientes, correspondientes a $n = 2(k+1) - 1 = 2k+1$ y a $n = 2(k+1) = 2k+2$:

$d_n = -3$	$d_n = -2$	$d_n = -1$	$d_n = 0$	$d_n = 1$	$d_n = 2$	$d_n = 3$
0	$3^{k-1}(1-p)^{k+1}p^{k-1}$	0	$2 \cdot 3^{k-1}(1-p)^{k}p^{k}$	0	$3^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{k+1}$	0
$3^{k-1}(1-p)^{k+2}p^{k-1}$	0	$3^{k}(1-p)^{k+1}p^{k}$	0	$3^{k}(1-p)^{k}p^{k+1}$	0	$3^{k-1}(1-p)^{k-1}p^{k+2}$
0	$3^{k}(1-p)^{k+2}p^{k}$	0	$2 \cdot 3^{k}(1-p)^{k+1}p^{k+1}$	0	$3^{k}(1-p)^{k}p^{k+2}$	0

Esto es una comprobación directa que omitimos.

Ahora, vemos que la probabilidad de que Sara pierda todo su dinero es la suma de las probabilidades de que d_n sea 3 para todo n, es decir,

$$p^3 + 3(1-p)p^4 + 9(1-p)^2p^5 + 27(1-p)^3p^6 = p^3 \sum_{j=0}^{\infty} (3(1-p)p)^j .$$

Si llamamos $s = \sum_{j=0}^{\infty} (3(1-p)p)^j$, vemos que

$$3(1-p)ps = s - 1,$$

por lo que

$$s = \frac{1}{1 - 3p + 3p^2},$$

y la respuesta al ejercicio es

$$\frac{p^3}{3p^2 - 3p + 1}.$$

$\square$

Problema 37. En una ruleta puede salir cualquier número del 0 al 2023 con la misma probabilidad. La ruleta se gira una y otra vez. Denotamos por P_k la probabilidad de que en algún momento la suma de los números que salen en todos los lanzamientos sea k. ¿Cuál es mayor: P_{2023} o P_{2024}?

Solución. Dividamos el juego en dos experimentos independientes: el primer giro de la ruleta, que da con probabilidad $\frac{1}{2024}$ cualquier número k de 0 a 2023, y el segundo experimento - todos los giros posteriores juntos. Todos los giros posteriores forman un juego similar que da, en algún momento, una suma m con probabilidad P_m. La probabilidad $P(A_{k,m})$ del evento $A_{k,m}$ = el primer lanzamiento resultó en k; la suma del resto en algún momento es m es $\frac{1}{2024}P_m$.

Supongamos que la suma de números en algún momento es $n \geq 2023$. Los eventos $A_{0,n}$, $A_{1,n-1}$, $A_{2,n-2}$, ... y así sucesivamente no son mutuamente excluyentes, por lo tanto,

$$P_n = P(A_{0,n}) + \ldots + P(A_{2023,n-2023}) = \frac{1}{2024}P_n + \ldots + \frac{1}{2024}P_{n-2023}.$$

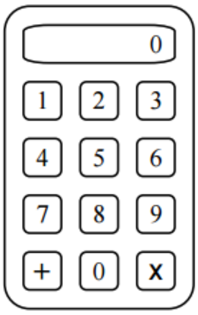
Como antes de comenzar el juego la suma es cero, entonces $P_0 = 1$. Por lo tanto,

$$P_{2023} - P_{2024} = \frac{1}{2024}(P_{2023} + P_{2023} + \ldots + P_0) - \frac{1}{2024}(P_{2024} + P_{2023} + \ldots + P_1) = \frac{1}{2024}(P_0 - P_{2023}) > 0,$$

ya que $P_{2023} < 1 = P_0$ (es evidente que la suma de 2023 puede no ocurrir).

□

Problema 38. En una calculadora hay dígitos del 0 al 9 y dos signos de operación (ver imagen).



Al principio, en la pantalla se muestra el número 0. Se puede presionar cualquier tecla. La calculadora realiza las operaciones en la secuencia de pulsaciones. Si se presiona el signo de operación varias veces seguidas, la calculadora recordará solo la última pulsación. El Científico Distraído presionó muchos botones en una secuencia aleatoria. Encuentra aproximadamente la probabilidad de que el resultado de la cadena de operaciones resultante sea un número impar.

Solución. Digamos que el Científico ha hecho n pasos si ha tecleado n números y entre ellos ha pulsado $n-1$ operaciones aritméticas. Denotaremos como p_n la probabilidad de que después de n pasos en la calculadora aparece un número impar, y expresaremos p_{n+1} en términos de p_n.

Si la última operación fue una multiplicación, entonces el resultado será impar solo si ambos factores son impares; la probabilidad de esto es $\frac{1}{2} \cdot p_n$. Si la última operación fue una suma, entonces el resultado será impar si el último sumando difiere en paridad del penúltimo; la probabilidad de esto es $\frac{1}{2}$. La última operación puede ser tanto una multiplicación como una suma, y ambos casos son igualmente probables. Por lo tanto, la fórmula de la probabilidad total nos da:

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_n.$$

Reescribiendo esta ecuación como $p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(p_n - \frac{1}{3})$, observamos que al aumentar n en 1, la diferencia $p_n - \frac{1}{3}$ se reduce en 4 veces. Por lo tanto, p_n se aproxima a $\frac{1}{3}$ para valores grandes de n.

Se puede encontrar el valor exacto de p_n. Es obvio que $p_1 = \frac{1}{2}$. Entonces

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \cdot 4^{n-1}}.$$

□

Problema 39. El rey Arturo tiene dos consejeros igualmente sabios: Merlín y Perceval. Cada uno de ellos da una respuesta correcta a cualquier pregunta con una probabilidad p o una respuesta incorrecta con una probabilidad $q = 1 - p$. Si ambos consejeros dicen lo mismo, el rey los sigue. Si dicen lo contrario, el rey toma una decisión lanzando una moneda.

Un día, Arturo se preguntó: ¿por qué necesito dos consejeros, no sería suficiente uno? Entonces llamó a los consejeros y les dijo:

– Me parece que la probabilidad de tomar decisiones correctas no disminuirá si dejo a un solo consejero y lo sigo. Si es así, debo despedir a uno de ustedes. Si no es así, dejaré todo como está. Respóndanme, ¿debo despedir a uno de ustedes?

– ¿A quién planeas despedir, rey Arturo? – preguntaron los consejeros.

– Si tomo la decisión de despedir a uno de ustedes, elegiré al azar, lanzando una moneda.

Los consejeros se fueron a pensar sus respuestas. Los consejeros, son igualmente sabios, pero no igualmente honestos. Perceval es muy honesto y tratará de dar una respuesta correcta, incluso si está en riesgo de ser despedido. Por otro lado, Merlín, honesto en todo lo demás, en esta situación decide dar una respuesta de manera que la probabilidad de ser despedido sea lo más baja posible. ¿Cuál es la probabilidad de que Merlín sea despedido?

Solución. Merlín debe razonar así.

Examinemos si es necesario despedir a un consejero. Si hay un solo consejero, entonces el rey, siguiendo su consejo, tomará la decisión correcta con una probabilidad p en cualquier pregunta. ¿Qué sucede cuando hay dos consejeros? La probabilidad de que ambos demos la respuesta correcta es p^2. Entonces el rey tomará la decisión correcta con una probabilidad de 1. Si ambos consejeros se equivocan (con probabilidad q^2), entonces el rey tomará la decisión correcta con una probabilidad de 0. Finalmente, si los consejeros difieren (probabilidad $2pq$), entonces el rey elegirá la decisión correcta con una probabilidad de $\frac{1}{2}$. Según la regla de la probabilidad total, $P(\text{el rey toma la decisión correcta}) = p^2 + 2pq \cdot \frac{1}{2} = p(p+q) = p$. Por lo tanto, deberíamos despedir a uno de los consejeros.

Si digo "Sí, deberíamos despedir", entonces hay dos casos.

1) Perceval también dirá "Sí" con una probabilidad de p, y luego el rey me despedirá con una probabilidad de $\frac{1}{2}$.

2) Perceval se equivocará (probabilidad q), y luego el rey tomará la decisión lanzando una moneda. Si decide despedir a alguien (probabilidad $\frac{1}{2}$), entonces seré yo nuevamente con una probabilidad de $\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $P(\text{me despedirán si digo "Sí"}) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q$.

Si digo "No, no deberíamos despedir", nuevamente hay dos casos.

1) Perceval dirá "Sí" (con una probabilidad de p), y luego el rey puede despedirme, lanzando la moneda dos veces (probabilidad $\frac{1}{2}$). 2) Perceval se equivocará (probabilidad q), y luego el rey no despedirá a nadie, ya que diremos lo mismo.

Entonces, $P(\text{me despedirán si digo "No"}) = \frac{1}{4}p$.

Obviamente, $\frac{1}{4}p < \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q$. Por lo tanto, debo decir "No".

Según la condición, Merlín encontrará esta respuesta con una probabilidad de p, y con una probabilidad de q Merlín se equivocará y dirá "Sí, despedir".

Entonces, según la regla de la probabilidad total:

$P(\text{Merlín será despedido}) = \frac{1}{4}p \cdot p + (\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q) \cdot q = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}pq + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}$.

□

Problema 40. Dos personas lanzan una moneda: una la lanzó 10 veces y la otra 11 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda persona haya obtenido más caras que la primera?

Solución. Los eventos "la segunda persona obtiene más caras que la primera" y "la segunda persona obtiene más cruces que la primera" son claramente equiprobables. Pero también se complementan mutuamente (ya que la segunda persona lanzó la moneda exactamente una vez más que la primera, por lo tanto, tiene más caras o más cruces, pero no ambos simultáneamente). Por lo tanto, la probabilidad de cada evento es $\frac{1}{2}$.

□

Problema 41. Un científico distraído creó en su laboratorio un organismo unicelular que, con una probabilidad del 0,6, se divide en dos organismos iguales, y con una probabilidad del 0,4, muere sin dejar descendencia. Encuentra la probabilidad de que después de algún tiempo no quede ningún organismo en el laboratorio.

Solución. No importa cuánto tiempo transcurra. Por lo tanto, para simplificar, supondremos que los organismos se dividen o mueren cada segundo, pero estrictamente uno a la vez. Cuando algo sucede con uno de ellos, los demás esperan pacientemente su turno. Haciendo esta suposición, obtenemos un problema estándar de caminos aleatorios: cada segundo, el número de organismos aumenta en uno (con una probabilidad $p = 0,6$), o disminuye en uno (con una probabilidad $q = 0,4$), respecto a lo que era. Llamaremos estado de la población a la cantidad de organismos en cierto momento. Sea x la probabilidad de que, después de varios pasos, la cantidad de organismos disminuya en 1. Al principio, la población está en el estado 1, y nos interesa la probabilidad de pasar de 1 a 0, que precisamente es el valor de x. La población puede llegar al estado 0 de dos maneras:

1. En el primer segundo, el único organismo existente muere. La probabilidad de este evento es q.
2. En el primer segundo, el único organismo se divide, y la población pasa al estado 2. La probabilidad de este evento es p. La transición posterior de 2 a 0 tiene una probabilidad de x^2, ya que consta de dos transiciones independientes $2 \to 1$ y $1 \to 0$, cada una con una probabilidad de x.

Por lo tanto, la fórmula de la probabilidad total da la ecuación $x = q + px^2$. De aquí, $x = 1$ o $x = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}$. Necesitamos determinar cuál de las raíces es correcta. Consideremos x como una función de p. Podemos utilizar las siguientes consideraciones.

1. La función $x(p)$ es continua.
2. $x(p) \leq 1$.
3. $x(1) = 0$ - si los organismos no mueren, sino solo se dividen, entonces la población no morirá nunca con certeza.

Estas tres condiciones son satisfechas por la función

$$x(p) = \begin{cases} 1 & 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p} & \frac{1}{2} < p \leq 1 \end{cases} .$$

En nuestro caso, $p = 0,6 > \frac{1}{2}$, por lo tanto, $x = \frac{q}{p} = \frac{2}{3}$.

□