PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023-2024

Hoja de Probabilidad II

Fecha: 26 de abril, 10, 17 y 24 de mayo **Grupo:** Mercurio y Venus

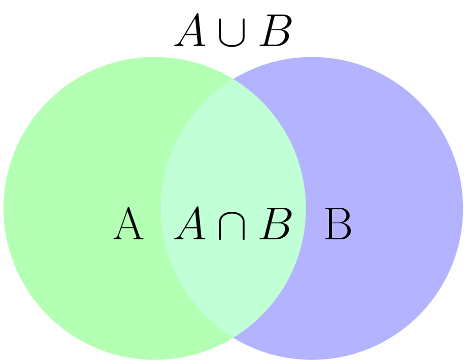
Suponemos que ya conoces el concepto de probabilidad de antes. En esta hoja repasaremos algunos métodos básicos de cálculo de probabilidades y terminaremos con algunos más avanzados

Unión e intersección de sucesos

Muchas veces necesitamos hallar la probabilidad de un suceso complejo, formado por varios sucesos simples. Cuando necesitamos que se cumpla al menos una de dos condiciones A y B, hablamos de la **unión** de los sucesos $A \cup B$. Si hace falta que se cumplan ambas condiciones, se trata de la **intersección** de los sucesos $A \cap B$. Las probabilidades de la unión y la de la intersección están relacionadas con la siguiente fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para entenderla basta echarle un vistazo al siguiente diagrama de Euler-Venn. Si sumamos las probabilidades $P(A) + P(B)$, la parte central, $P(A \cap B)$, se cuenta dos veces, por lo que hay que restarla de la suma para llegar a la probabilidad de la unión:



Definición 1. Dos sucesos A, B se llaman **independientes** si el hecho de que ocurra A no influye en la probabilidad de que ocurra B.

Podemos considerar independientes, por ejemplo, el hecho de que Donald Trump se tome un café por la mañana y el hecho de que una niña granadina de 1º de Primaria llegue tarde al cole (si quieres pasar media hora totalmente rayado, ¡piensa en el efecto mariposa!).

Ejemplo resuelto. Hemos lanzado un dado 3 veces y ha salido un 6. ¿Cuál es la probabilidad de que, al volver a lanzarlo, salga un 6?

Solución. Este ejemplo es muy importante. Algunos pensarán que si el 6 ha salido tantas veces es más probable que ahora no salga. Otros dirán que el dado está trucado y la probabilidad de que vuelva a salir un 6 es mayor de $\frac{1}{6}$. En el mundo real no podemos descartar esta posibilidad. Pero en el mundo matemático, donde suponemos que los 6 resultados son equiprobables, la respuesta del 4º lanzamiento **no**

depende de los resultados anteriores, sigue siendo $\frac{1}{6}$. El dado no tiene memoria ni tampoco va a intentar mostrarnos una cara diferente para variar. Por eso consideramos que los consecutivos lanzamientos de dado o de moneda son independientes. Lo serían incluso si el dado estuviera trucado. $\square$

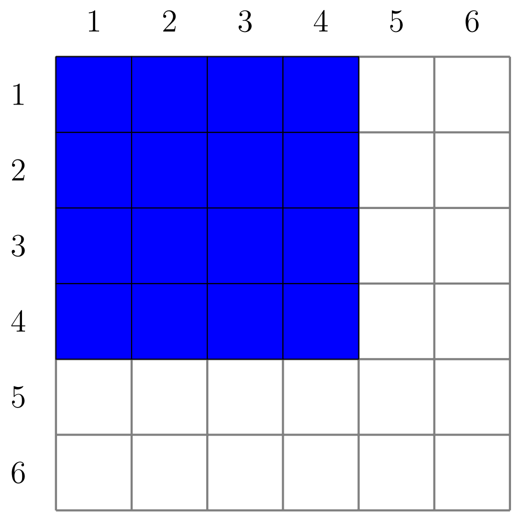
Si y solo si los sucesos A y B son independientes, podemos recurrir a la regla del producto:

Teorema 1.

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo resuelto. Hallemos la probabilidad de que al lanzar dos dados salgan solamente 1, 2, 3 o 4.

Solución. Por supuesto, podemos representar el espacio muestral como una tabla de 6×6 y contar las casillas azules:



Pero para 3 lanzamientos de dado tendríamos que hacer un dibujo tridimensional, y para 4 sería ya imposible. Sin embargo, recurriendo a la regla del producto (ya que los lanzamientos son independientes) hallamos la respuesta en una operación:

$$P(1,2,3 \text{ o } 4 \text{ en } 2 \text{ lanzamientos}) = P(1,2,3,4) \cdot P(1,2,3,4) = (\frac{4}{6})^2 = \frac{4}{9}. \quad \square$$

Problema 1. Halla la probabilidad de que un número de 3 cifras cogido al azar sea múltiplo de 5 o múltiplo de 7.

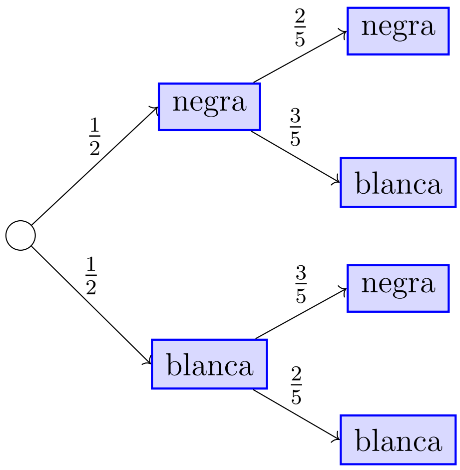
Árboles de sucesos

A menudo el primer suceso que ocurre cambia el segundo.

Ejemplo resuelto. En una urna hay 3 bolas blancas y 3 negras. Sacamos una bola, luego otra. Halla la probabilidad de que ambas bolas sean blancas.

Solución. La probabilidad de que la primera sea blanca claramente es un medio. Pero al sacar la primera, quedan solamente 2 blancas, por lo que la probabilidad de que la segunda sea blanca es igual a $\frac{2}{5}$, y la respuesta al problema es$\frac{1}{5}$. $\square$

Para estudiar este y otros casos los matemáticos recurrimos a árboles de sucesos. Cada rama indica un resultado posible. El ejemplo anterior se podría dibujar así:



El árbol puede resultarnos útil también para sumar distintas ramas.

Ejemplo resuelto. En una urna hay 3 bolas blancas y 3 negras. Sacamos una bola, luego otra. Halla la probabilidad de que las bolas sean de colores distintos.

Solución. En el árbol anterior necesitamos las dos ramas del medio. La probabilidad que buscamos será $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$. $\square$

Problema 2. De una baraja de 52 cartas se sacan 4. Halla la probabilidad de que sean del mismo palo.

Sucesos complementarios

Caballero blanco: Cuando canto esta canción todos lloran o...
Alicia: ¿O qué?
Caballero blanco: O no lloran, naturalmente.

Tertium non datur es un principio lógico que afirma que o bien ocurre un suceso o bien ocurre lo contrario. Esta mañana o me he tomado un café o no, no vale considerar opciones intermedias (aunque hayan entrado un par de moléculas de café en mi cuerpo debo considerarlo como que sí me lo he tomado). Traduciendo este principio al lenguaje matemático tenemos

$$A \cup \overline{A} = Verdad, Prob(A) + Prob(\overline{A}) = 1$$

donde con $\overline{A}$ se detona el suceso contrario al suceso A.

Trabajar con sucesos complementarios a menudo es más cómodo.

Ejemplo resuelto. Busquemos la probabilidad de que en 3 lanzamientos de dado salgan números distintos.

Solución. Para esto, el segundo lanzamiento no tiene que coincidir con el primero, y el tercero, ni con el primero ni con el segundo. Por tanto, si N_i es el resultado del lanzamiento número i, nuestra probabilidad es producto de dos:

$$P(3\ distintos) = P(N_1 \neq N_2) \cdot P(N_3 \neq N_2 \cup N_3 \neq N_1) = (1 - \frac{1}{6}) \cdot (1 - \frac{2}{6}) = \frac{5}{9}. \quad \square$$

En realidad, *tertium non datur* es un caso particular de otro principio más global. Para formularlo necesitamos una nueva definición:

Definición 2. Un conjunto de sucesos A_i forma una **partición** del espacio muestral si son incompatibles de dos en dos (es decir, si $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) y su unión cubre todo el espacio muestral,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = Espacio\ muestral$$

Aquí va unos ejemplos:

1. Un suceso y su complementario claramente forman una partición porque

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = E.$$

2. Las seis caras de un dado forman una partición del espacio muestral en 6 sucesos incompatibles.

Ahora ya podemos formular nuestro principio general:

Teorema 2. *Si los sucesos A_i forman una partición del espacio muestral,*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

es decir, la suma de sus probabilidades es igual a 1.

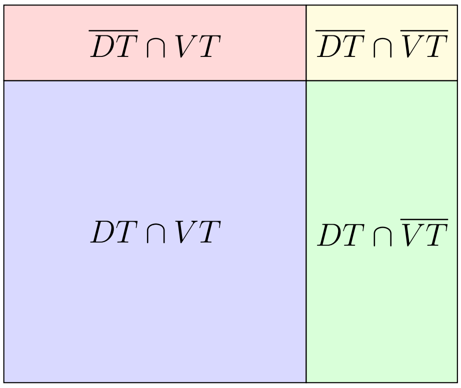
En realidad, podemos hacer una partición de cualquier suceso en base a la partición del espacio muestral. Por ejemplo, sabemos que Donald Trump o se toma un café por la mañana o no. Si llamamos DT el suceso de que Trump se tome su café por la mañana, la pareja de sucesos $DT, \overline{DT}$ forman una partición del espacio muestral. Ahora puedo intersecar cualquier otro suceso con esta partición.

Llamemos $VTarde$ el suceso de que Valeria llegue tarde al cole. Si llega tarde, puede ser el día que Donald Trump se va a tomar un café o el día que no. Entonces,la pareja de sucesos $DT, \overline{DT}$ forman una partición del suceso $VTarde$:

$$VTarde = (VTarde \cap DT) \cup (VTarde \cap \overline{DT})$$

Por ejemplo, si Trump desayuna con un café 4 de cada 5 mañanas y Valeria llega tarde 2 de cada 3 días,

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}.$$



Esto nos lleva a formular el teorema de la probabilidad completa:

Teorema 3. *Si los sucesos A_i forman una partición del espacio muestral, para cualqueir suceso B se cumple*

$$P(B) = \sum_{i} P(B \cap A_i)$$

Es decir, podemos descomponer cada suceso en suma de intersecciones con los sucesos de la partición.

Problema 3. ¿Cuál es el complementario del suceso “en dos lanzamientos de moneda salen 2 caras”? Nómbralo sin usar la palabra ”no”.

Problema 4. ¿Cuál es el complementario del suceso “en dos lanzamientos de moneda sale al menos una cara”?

Al menos

Supongamos que queremos hallar la probabilidad de que salga al menos un 6 en tres lanzamientos. Por supuesto, podemos representar el espacio muestral como un cubo de $6 \times 6 \times 6$ y calcular la cantidad de cubitos en todas las caras que contengan un 6. El problema es que estas caras tienen aristas comunes, que habría que contar una vez, no dos, y el cubito $(6, 6, 6)$, que habría que contar una vez y no tres. Puedes intentar contar esos cubitos mientras me vaya a tomar un café...

Ahora imagínate que te pido que halles la probabilidad de que salga al menos un 6 en 10 lanzamientos. ¡Manos a la obra! Imagínate un cubo 10-dimensional... ¡Noooo! ¡No podemos hacerlo!

Usaremos un truco: siempre que nos pidan hallar la probabilidad de que un suceso ocurra al menos 1 vez, buscaremos la probabilidad complementaria, que este evento no ocurra. Por ejemplo, para hallar la probabilidad de que salga un 6 en 3 lanzamientos buscaremos la probabilidad de que no salga ningún 6. Visualmente, corresponde al cubo $5 \times 5 \times 5$ incluido en el cubo grande, lo que corresponde a 125 cubitos de los 216 que hay. Por tanto, la probabilidad que buscamos es

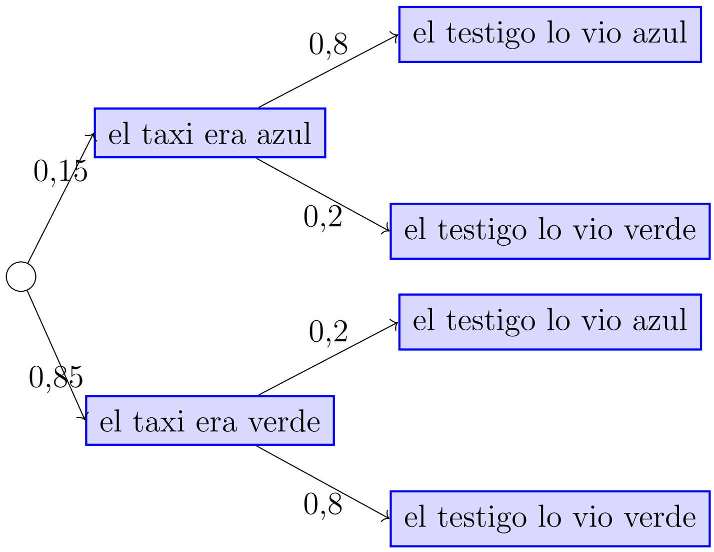
$$P(al\ menos\ un\ 6) = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$$

Podríamos también haber recurrido a la regla del producto:

$$P(sin\ 6\ en\ 3\ lanzamientos) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow P(al\ menos\ un\ 6) = 1 - \frac{125}{216}$$

Probabilidad condicional

Un taxi atropelló a una señora y se fue. En esa pequeña ciudad norteamericana había 2 compañías de taxis: El Taxi Verde y El Taxi Azul, la primera compañía contaba con 85 taxis verdes y la segunda, con 15 azules. El único testigo que vio el accidente dijo que era azul. Según las investigaciones ese testigo era capaz de distinguir el color del coche de noche en un 80% de los casos. Los jueces, confiando en el testigo, condenaron al taxista de un taxi azul que se encontraba cerca del lugar del accidente. Pero... ¿cuál realmente era la probabilidad de que el taxi fuera azul? Haremos un árbol de sucesos.



Como sabemos que el testigo vio un taxi azul, nos interesan la primera rama (el taxi era azul y así lo vio el testigo) y la tercera (el taxi era verde pero el testigo se equivocó y le pareció que era azul). Calculemos las probabilidades:

$$P(era\ verde) = 0,85 \cdot 0,2 = 0,17$$

$$P(era\ azul) = 0,15 \cdot 0,8 = 0,12$$

Para nuestra sorpresa ¡resulta bastante más probable que el taxi en realidad era verde! Esta probabilidad se puede calcular no basándonos en el 100% de los casos totales, sino en estas dos ramas del árbol, que sabemos que son las únicas que tienen sentido (porque el testigo no vio el taxi verde).

$$P(era\ verde\ aunque\ lo\ vieron\ azul) = \frac{0,17}{0,17+0,12} = \frac{17}{29} \approx 59\%$$

Este hecho sorprendente se debe a que había muchísimos más taxis verdes que azules, por lo que la probabilidad de que - a priori - el taxi fuese azul era muy baja. De hecho, cuando se revisó el caso, descubrieron al auténtico autor del atropello, había conducido un taxi verde.

Esta probabilidad que hemos calculado se llama la probabilidad condicional. En vez de considerar todo el espacio muestral (las 4 ramas del árbol) hemos visto una parte suya, un subconjunto que satisface la condición "el testigo vio el taxi azul". Por esto hemos dividido los sucesos favorables entre la suma de las probabilidades de dos ramas, no cuatro.

Definición 3. La **probabilidad condicional** del suceso A en condición H se denota $P(A|H)$ y se mide en el subconjunto del espacio muestral que satisface la condición.

Veamos otro ejemplo. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. A nivel práctico, si paro a un alumno de este centro y le pregunto si juega al fútbol, con la probabilidad de un medio me dirá que sí.

Por otro lado, si voy a un entrenamiento de baloncesto y empiezo a preguntar si juegan al fútbol, la respuesta mayoritaria será que no. Es natural: entre los jugadores de baloncesto muy pocos juegan también al fútbol. De hecho, podemos calcularlo: si los que juegan al baloncesto son un 25%, y los que practican ambos deportes, un 5%, el porcentaje de jugadores de fútbol **entre los jugadores de baloncesto** será un $\frac{5}{25} = 20\%$, es decir, solamente uno de cada cinco me dirá que juega al fútbol.

Como ves, la diferencia entre la probabilidad total y la condicional, es el espacio muestral. La probabilidad total se calcula respecto al total (en este caso, el total de alumnos del centro), mientras que la condicional se calcula respecto a un subconjunto (los alumnos que juegan al baloncesto).

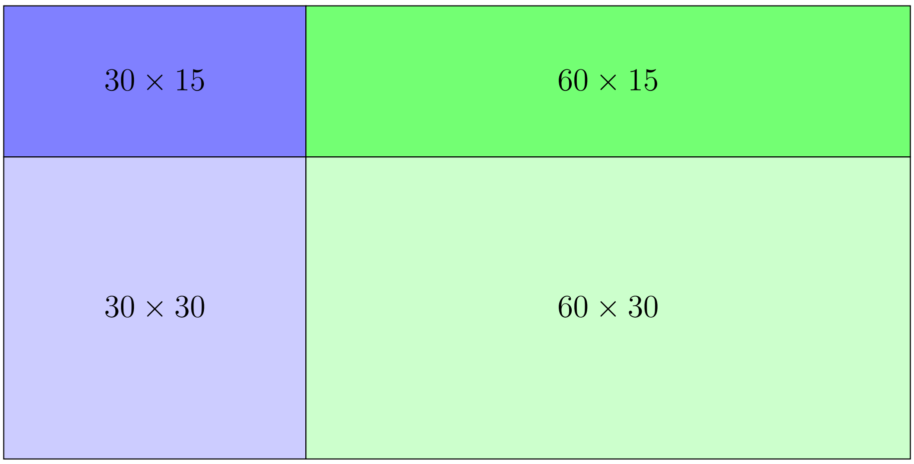
Podemos calcular la probabilidad condicional usando árboles, pero también podemos recurrir a una fórmula extremadamente útil, que se llama el **teorema de Bayes**:

Teorema 4.

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

Volviendo a nuestro ejemplo del fútbol, $P(H) = 0,25$ (la probabilidad de jugar al baloncesto), $P(A \cap H) = 0,05$ (la probabilidad de jugar al fútbol y al baloncesto), por lo que $P(A|H) = \frac{P(A\cap H)}{P(H)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$ (la probabilidad de jugar al fútbol con la condición de que el alumno juega al baloncesto).

Problema 5. Guille tiene en su habitación un corcho que a veces usa para lanzar dardos, y ¡siempre acierta! El corcho es un rectángulo de 90cm de ancho y 45cm de alto, y está dividido en cuatro regiones, como se aprecia en el dibujo:



Halla las siguientes probabilidades:

1. P(dar en la región azul)

2. P(dar en la región azul claro)

3. P(dar en la región azul claro sabiendo que he dado en la región azul)

4. P (dar en la región verde oscuro sabiendo que no he dado en la zona azul claro)

Probabilidad total

Supongamos que tenemos una partición A_i del espacio muestral y un suceso B. Entonces, descomponiendo el suceso B tenemos

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$$

Ahora expresaremos cada una de las intersecciones usando el teorema de Bayes:

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Esta es la fórmula de la probabilidad total.

Problema 6. Cuatro personas A, B, C y D están esperando en la cola del médico. Busca la probabilidad de que

1. Primero atiendan a A sabiendo que B es el último en llegar

2. Primero atiendan a A sabiendo que A NO es el último en llegar

3. Primero atiendan a A sabiendo que B NO es el último en llegar

4. Primero atiendan a A sabiendo que B va después

5. Atiendan a A antes que a B sabiendo que C va después de A

Sucesos independientes

Hemos definido dos sucesos como independientes si la ocurrencia de uno no influye en la ocurrencia del otro. Ahora podemos reformular esta definición en términos de la probabilidad condicional:

Definición 4. Los sucesos A, B se llaman **independientes** si $P(A|B) = P(A)$.

Ejemplo resuelto. Vamos a demostrar que si en el primer lanzamiento de dado ha salido un 6, este resultado no influye en la probabilidad de sacar un 6 en el segundo lanzamiento.

$$P(6\ en\ seg|6\ en\ prim) = \frac{P(6\ en\ seg \cap 6\ en\ prim)}{P(6\ en\ prim)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Como $P(6\ en\ seg|6\ en\ prim) = P(6\ en\ seg)$, los sucesos son independientes.

Es fácil demostrar ahora el criterio de independencia que hemos visto antes:

$$A\ y\ B\ independientes \longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Proof.

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Pero como $P(A|B) = P(A)$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ □

La probabilidad y la idea de los sucesos independientes a menudo nos ayudan a solucionar problemas que pueden parecer complicados.

Ejemplo resuelto. Un sábado un grupo de ornitólogos atrapó 40 pájaros de la reserva y los anilló. Al día siguiente atraparon 50 pájaros, y entre ellos había 18 anillados. ¿Podemos estimar la cantidad de pájaros en la reserva?

Solución. Si suponemos que los sucesos de ”ser atrapado el sábado” y ”ser atrapado el domingo” son independientes para cada pájaro, la relación $18 : 50$ tiene que ser igual a $40 : N$, donde N es la cantidad total de pájaros en la reserva. De ahí que esta cantidad sea aproximádamente igual a $\frac{50 \cdot 40}{18} \approx 111$. □

Problema 7. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. Los sucesos A=jugar al fútbol y B=jugar al baloncesto ¿son independientes?

Ejercicios

Problema 8. En clase hay 25 niños. La profesora elige a 2 encargados aleatoriamente. La probabilidad de que ambos sean niñas es $\frac{3}{25}$. ¿Cuántas niñas hay en esta clase?

Problema 9. Un alumno suspende mates con la probabilidad de $\frac{2}{3}$, suspende lengua con la probabilidad de $\frac{2}{3}$. Sabiendo que siempre suspende al menos una de estas asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido ambas?

Problema 10. En el plano se dibujan 7 puntos no colineares. Juan elige al azar 3 puntos, Javier, otros 3. ¿Cuál es la probabilidad de que sus triángulos no tengan vértices comunes?

Problema 11. En una habitación hay tres cómodas, cada una con dos cajones. En la primera cómoda hay 2 monedas de plata, en la segunda, una de plata y una de oro, y en la tercera, dos monedas de oro, pero no sabemos cuál es cuál. Yo abro un cajón y encuentro una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar en el otro cajón de la cómoda una moneda de oro?

Problema 12. Ana y Javier tienen dos hijos. Se sabe que Ana tiene al menos un hijo varón y que el hijo mayor de Javier es varón. ¿Es más probable que Ana tenga dos hijos varones o que Javier tenga dos hijos varones?

Problema 13. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. Los sucesos A=jugar al fútbol y B=jugar al baloncesto ¿son independientes?

Problema 14. Demuestra que si A, B son independientes, también lo son $A, \overline{B}$

Problema 15. De cada 7 filósofos hay 1 matemático, y de cada 5 matemáticos uno es filósofo. ¿Hay más filósofos o matemáticos?

Problema 16. ¿Qué es más probable, que en 3 lanzamientos de dado salga un 6 o que no salga ninguno?

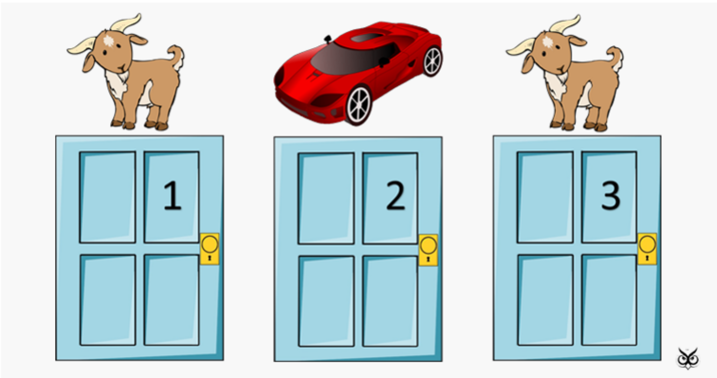
Problema 17. Tenemos dos dados. ¿Es posible escribir en sus caras números naturales de tal manera que la suma de sus resultados tome valores aleatorios de 0 a 35 con la misma probabilidad?

Problema 18. El Rey ofrece al prisionero 10 bolas negras, 10 blancas y 2 cajas. Tiene que repartir TODAS las bolas entre dos cajas. Luego el rey elegirá una caja al azar y sacará una bola. Si es negra, el prisionero morirá, si es blanca, será liberado. ¿Puede el prisionero mejorar su suerte?

Problema 19. Cuando empieza el embarque, el pasajero loco embarca primero y ocupa un asiento aleatorio. Cuando un pasajero (P_1) que tenía este asiento reservado le pide amablemente que se vaya, el pasajero loco se niega rotundamente, de modo que el pobre P_1 se levanta de hombros y se sienta en el primer asiento que le parezca adecuado. Cuando llega el pasajero que debe sentarse en este último asiento, el P_1 le cuenta la historia y dice que no se va a mover de su sitio, de modo que el pobre pasajero P_2 se busca un asiento vacío, y así hasta que el avión se llena. ¿Con qué probabilidad el último pasajero en llegar ocupará su propio asiento? El avión tiene n asientos en total.

Problema 20. Tenemos tres dados no convencionales, con números entre 1 y 9, cada uno repetido dos veces. Yo elijo un dado, tú eliges otro. Luego cada uno lanza su dado. Gana el que obtiene mayor puntuación. ¿Serías capaz de inventar 3 dados con estas características que te permitan obtener más victorias en una larga serie de partidas?

Problema 21. Delante de ti hay tres puertas. Detrás están escondidos dos cabras y un coche. Después de elegir una puerta, el presentador, para facilitarte la tarea, abre una puerta distinta de la que has elegido tú y te muestra que detrás hay una cabra. Quedan dos puertas cerradas, una cabra y un coche detrás. ¿Es mejor seguir optando por la puerta que has elegido inicialmente, cambiar de puerta o da exactamente igual?



Problema 22. En este juego se pone un sombrero azul o rojo a dos participantes, completamente al azar, de manera que ven el del compañero pero no el suyo. Simultáneamente dirán un color. Si ambos aciertan el color de su propio sombrero, ganan 100 €, si al menos uno se equivoca, pierden 80€. ¿Existe alguna estrategia para hacer este juego rentable? ¿Y si son tres participantes y ganan sólo si aciertan los tres?

Problema 23. Adrián y Belén tienen una moneda trucada que cuando la tiras al aire tiene probabilidad $\frac{4}{7}$ de salir cara y probabilidad $\frac{3}{7}$ de salir cruz. Juntos juegan al siguiente juego: se van a turnar tirando la moneda, y gana el primero que saque cruz. Si Adrián es el primero en jugar, ¿cuál es la probabilidad de que gane?

Problema 24. Tres condenados a muerte se enteran de que uno de ellos ha sido perdonado, y el carcelero sabe quién es. El condenado A le ruega que le revele el nombre del perdonado, pero el carcelero se niega rotundamente. Entonces A le dice: "Si el perdonado es el B, dime que ejecutarán a C, si es C, dime que ejecutarán a B, y si soy doy, tira una moneda y di B o C al azar". El carcelero le anuncia que ejecutarán a B. Muy contento, porque cree que su probabilidad de salvarse ha aumentado, A se lo cuenta a C, el cual también se pone contentísimo. ¿Ha aumentado realmente la probabilidad de salvarse para alguno de ellos (o ambos) con esta noticia?

Problema 25. Sabemos que saber francés aumenta la probabilidad de saber alemán (el porcentaje de personas que saben alemán entre toda la población mundial es menor que este porcentaje entre las personas que hablan francés). ¿Es verdad que saber alemán aumenta la probabilidad de saber francés?

Problema 26. En un torneo de ajedrez entre dos personas gana el que haya cosechado primero 6 victorias. Lamentablemente, el torneo se cancela en el momento en que un jugador ha ganado 5 partidas y el otro 3. ¿Cómo hay que dividir el premio? Luca Pacioli pensaba que en relación 5:3, Tartaglia, que 2:1, y Fermat, que 7:1. ¿Qué opinas tú?

Problema 27. En un colegio el 30% toca algún instrumento musical, pero entre los chicos son solo el 15%. De cada 5 alumnos 3 son chicas. Si vemos a alguien ensayando, ¿es más probable que sea chico o chica? ¿Con qué probabilidad?

Problema 28. Acabas de hacerte un análisis que detecta el bobovirus, una peligrosísima enfermedad terminal, y ¡QUÉ HORROR! te ha dado positivo...

Sabes que el bobovirus afecta al 0,1% de la población, y que el test a veces falla... En un 10% de los casos da negativo cuando la persona está infectada, y en un 20% de los casos, da un falso positivo. ¿Con qué probabilidad estás realmente infectado?

Problema 29. En el tablero de 3×3 colocan 4 cruces de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que formen un 3 en raya?

Problema 30. Se lanza el dado 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que los números vayan apareciendo por orden, de menor a mayor?

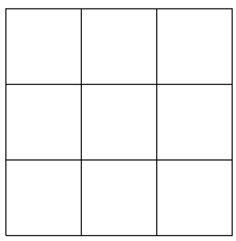
Problema 31. A los cuartos de final han llegado 8 equipos. Los emparejan de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de estos equipos, A y B, se enfrenten en las semifinales? Suponemos que cada equipo gana con la probabilidad de un medio.

Problema 32. Sabemos que $P(A \cap B) \leqslant 0,9, P(A \cap C) \leqslant 0,9$. ¿Es verdad que $P(A|B \cap C) \leqslant 0,9$?

Problema 33. En la antigua India cuando dos enamorados de familias enfrentadas querían casarse, tenían que demostrar que su amor era verdadero de la siguiente manera: un juez entrelazaba unas cuantas hebras dejando entrever solamente sus extremos. Los enamorados tenían que atar cada uno de los extremos superiores con uno de los extremos inferiores, si se formaba un único lazo, les permitían casarse, si no, no. Calcula la probabilidad de poder casarse para 3 hebras, n hebras.

Problema 34. Dos vaqueros, Jim y John están jugando a la ruleta rusa. En su revólver de 6 balas hay una bala cargada. Jim empieza. ¿Cuál es la probabilidad de que muera él?

Problema 35. La hormiga Miga se desplaza por los lados de esta cuadrícula:

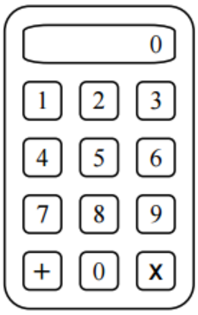


Cuando llega a un vértice V, elige el siguiente vértice al que desplazarse con igual probabilidad entre todos los vértices adyacentes (horizontal o verticalmente) a V en la cuadrícula. Para cada vértice de la cuadrícula, determina la probabilidad de que, partiendo de ese vértice, la hormiga Miga llegue antes a la esquina de abajo a la izquierda que a la esquina de arriba a la derecha.

Problema 36. Sara tiene 3 euros y hace una serie de apuestas. Las apuestas son independientes, y para cualquiera de las apuestas que hace, tiene una probabilidad p de perderla. Por cada apuesta que gana, Sara gana 1 euro, y por cada una que pierde, pierde 1 euro. Sara para de apostar cuando llega a tener 6 euros o cuando se queda sin dinero. Calcula (con demostración) la probabilidad de que Sara se quede sin dinero.

Problema 37. En una ruleta puede salir cualquier número del 0 al 2023 con la misma probabilidad. La ruleta se gira una y otra vez. Denotamos por P_k la probabilidad de que en algún momento la suma de los números que salen en todos los lanzamientos sea k. ¿Cuál es mayor: P_{2023} o P_{2024}?

Problema 38. En una calculadora hay dígitos del 0 al 9 y dos signos de operación (ver imagen).



Al principio, en la pantalla se muestra el número 0. Se puede presionar cualquier tecla. La calculadora realiza las operaciones en la secuencia de pulsaciones. Si se presiona el signo de operación varias veces seguidas, la calculadora recordará solo la última pulsación. El Científico Distraído presionó muchos botones en una secuencia aleatoria. Encuentra aproximadamente la probabilidad de que el resultado de la cadena de operaciones resultante sea un número impar.

Problema 39. El rey Arturo tiene dos consejeros igualmente sabios: Merlín y Perceval. Cada uno de ellos da una respuesta correcta a cualquier pregunta con una probabilidad p o una respuesta incorrecta con una probabilidad $q = 1 - p$. Si ambos consejeros dicen lo mismo, el rey los sigue. Si dicen lo contrario, el rey toma una decisión lanzando una moneda.

Un día, Arturo se preguntó: ¿por qué necesito dos consejeros, no sería suficiente uno? Entonces llamó a los consejeros y les dijo:

– Me parece que la probabilidad de tomar decisiones correctas no disminuirá si dejo a un solo consejero y lo sigo. Si es así, debo despedir a uno de ustedes. Si no es así, dejaré todo como está. Respóndanme, ¿debo despedir a uno de ustedes?

– ¿A quién planeas despedir, rey Arturo? – preguntaron los consejeros.

– Si tomo la decisión de despedir a uno de ustedes, elegiré al azar, lanzando una moneda.

Los consejeros se fueron a pensar sus respuestas. Los consejeros, son igualmente sabios, pero no igualmente honestos. Perceval es muy honesto y tratará de dar una respuesta correcta, incluso si está en riesgo de ser despedido. Por otro lado, Merlín, honesto en todo lo demás, en esta situación decide dar una respuesta de manera que la probabilidad de ser despedido sea lo más baja posible. ¿Cuál es la probabilidad de que Merlín sea despedido?

Problema 40. Dos personas lanzan una moneda: una la lanzó 10 veces y la otra 11 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda persona haya obtenido más caras que la primera?

Problema 41. Un científico distraído creó en su laboratorio un organismo unicelular que, con una probabilidad del 0,6, se divide en dos organismos iguales, y con una probabilidad del 0,4, muere sin dejar descendencia. Encuentra la probabilidad de que después de algún tiempo no quede ningún organismo en el laboratorio.