PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023-2024

Fecha: 26 de abril, 10, 17 y 24 de mayo **Grupos:** Marte y Neptuno

Probabilidad

Para esta hoja, recomendamos leerla en orden hasta completar el Problema 9. A partir de allí, se pueden hacer los problemas en el orden que se desee. Al final de la hoja están los problemas más difíciles.

¿Qué es la probabilidad?

A lo largo de tu vida habrás oído muchísimas veces expresiones relacionadas con la probabilidad.

- "Es cien por cien seguro que viene".
- "La probabilidad de precipitaciones es un 90%".

En la vida cotidiana se suele hablar de porcentajes, pero **los matemáticos para expresar la probabilidad usamos un número entre el 0 y el 1**. Es decir, para los dos ejemplos anteriores, diríamos

- "La probabilidad de que venga es 1".
- "La probabilidad de precipitaciones es 0,9".

La probabilidad no se refiere a objetos, sino a eventos. Una taza no puede tener probabilidad, sin embargo, el hecho de que una taza se rompa al chocarse contra el suelo, sí. Cada evento futuro puede ocurrir o no ocurrir, y sobre cada evento pasado podemos discutir si ha ocurrido o no. Si estás leyendo este texto, por ejemplo, la probabilidad de que hayas nacido es 1.

Es realmente difícil adjudicar un valor de probabilidad a un suceso, sin embargo, los científicos inventaron ciertos trucos. Por ejemplo, se han dedicado a realizar el mismo experimento miles de veces apuntando las veces que salía exitoso. En un experimento que ya tiene siglos y que puedes replicar tú, se lanzó una moneda 10000 veces y salieron 5012 cruces. No es exactamente la mitad, pero está muy cerca de la mitad. Este hecho permitió a Pierre-Simon Laplace a crear un concepto teórico de la probabilidad.

Fórmula de Laplace: Si un experimento

- tiene N resultados posibles, todos ellos con la misma probabilidad de ocurrir (son **equiprobables**), y
- se considera exitoso si aparecen M de estos resultados,

entonces, la probabilidad de que el experimento tenga éxito se determina con la fórmula

$$P = \frac{M = \text{ casos favorables}}{N = \text{ casos totales}}.$$

Es muy importante entender que esta fórmula no predice el resultado de un experimento, sino lo aproxima. La teoría de probabilidad nos puede dar pistas sobre el futuro, pero es entre difícil e imposible preverlo.

Ejemplo resuelto. Un dado tiene 6 caras. Si no está trucado, al lanzarlo, saldrá cualquiera de las 6 caras con la misma probabilidad. Por tanto, la probabilidad de que salga un 3 es $\frac{1}{6}$, igual que la probabilidad de que salga un 5, un 6 o un 1.

Ahora bien, si lo lanzo 6 veces, no es seguro que cada número aparezca exactamente una vez, de hecho, es más probable que alguno se repita (este problema lo resolveremos más tarde, en el Problema 11).

En muchos problemas la dificultad para aplicar la fórmula de Laplace radica en comprender cuáles son todos los resultados posibles de un experimento. Le damos un nombre a este concepto.

Definición. Todos los posibles resultados de un experimento forman un conjunto que se llama **espacio muestral**.

Ejemplo resuelto. Si lanzamos una moneda 3 veces, **¿cuántos posibles resultados podemos obtener?**. Si nos ponemos a dibujar a mano todas las combinaciones de caras y cruces posibles en 3 lanzamientos, obtendremos algo así:

○○○ ○○× ○×○ ×○○
××○ ○×× ×○× ×××

Este dibujo representa al espacio muestral de este experimento, por lo que **tiene 8 resultados posibles**.

En realidad, es lógico que nos hayan salido 8 valores porque hay 3 lanzamientos, y para cada lanzamiento hay 2 posibles valores (cara o cruz), por lo que hay $2^3 = 8$ posibles resultados del experimento.

Teniendo en cuenta el ejemplo resuelto anterior y la fórmula de Laplace, resuelve el siguiente ejercicio.

Problema 1. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar 3 veces una moneda, nos salgan 2 cruces?

Solución. 2 cruces en 3 lanzamientos equivalen a 1 cara en 3 lanzamientos. Una cara puede aparecer en el primero, segundo o tercer lanzamiento. Vemos que entre las 8 opciones posibles las favorables son 3, por lo que esta probabilidad es $\frac{3}{8}$. □

Ejemplo resuelto. A la hora de aplicar la fórmula de Laplace es importante de que te asegures de que los resultados del experimento tienen todos la misma probabilidad de ocurrir, si no es así no podrás usar la fórmula, porque llegarás a conclusiones equivocadas. Por ejemplo, podemos considerar el experimento consistente en comprobar si te muerde un cocodrilo a lo largo de tu vida. El espacio muestral tiene dos opciones: o te muerde un cocodrilo, o no. Según la fórmula de Laplace, la probabilidad se calcula dividiendo los casos favorables (1) entre el total de los casos (2). Por tanto, la probabilidad de que te acabe mordiendo un cocodrilo sería $\frac{1}{2}$. Pero esto no es así, porque lo normal es que no te muerda ningún cocodrilo nunca, y no es igual de probable que te muerda un cocodrilo que que no lo haga.

Problema 2. Lanzamos un dado 2 veces, ¿cuántos posibles resultados podemos obtener? Dibuja el espacio muestral. Calcula la probabilidad que te salgan dos números seguidos (en orden creciente o decreciente).

Solución. El espacio muestral consiste en el conjunto de todas las parejas (a, b) donde $1 \leq a, b \leq 6$. Por lo tanto tiene 36 elementos. Entre estas parejas hay 10 parejas (a, b) con a y b seguidos. Por lo tanto la probabilidad buscada es $\frac{5}{18}$. □

Problema 3. A una mesa redonda se sientan 5 chicos y 5 chicas. Una de las chicas se llama María. ¿Cuál es la probabilidad de que a la derecha de María haya un chico?

Solución. A la derecha de María puede estar cualquiera de los 5 chicos y 4 chicas. Entonces, el espacio muestral son 9 personas y los sucesos favorables son 5, por lo que la respuesta es $\frac{5}{9}$. □

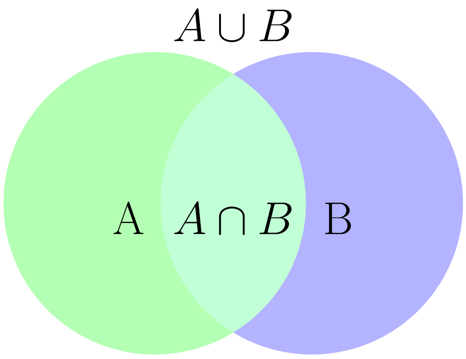
Unión e intersección de sucesos

Muchas veces necesitamos hallar la probabilidad de un suceso complejo, formado por varios sucesos simples:

- Cuando necesitamos que se cumpla al menos una de dos condiciones A y B, hablamos de la **unión** de los sucesos $A \cup B$.
- Si hace falta que se cumplan ambas condiciones, se trata de la **intersección** de los sucesos $A \cap B$.

> Las probabilidades de la unión y la de la intersección están relacionadas con la siguiente fórmula:
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Para entenderla basta echarle un vistazo al siguiente diagrama de Euler-Venn. Si sumamos las probabilidades $P(A) + P(B)$, la parte central, $P(A \cap B)$, se cuenta dos veces, por lo que hay que restarla de la suma para llegar a la probabilidad de la unión:



Ejemplo resuelto. Calcula la probabilidad de que al tirar un dado de 6 caras, obtengamos un número par o un número que nos dé resto 1 al dividirlo por 3.

Solución. Llamamos A al suceso consistente en que nos salga un número par, y B al suceso consistente en que nos salga un número que dé resto 1 al dividirlo por 3. A corresponde a que nos salga $2, 4$ o 6, y el suceso B corresponde a que nos salga 1 o 4. Por tanto, el suceso $A \cup B$ corresponde a que nos salga $1, 2, 4$ o 6, por lo que la respuesta a este problema es

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Sin embargo, también podemos calcularla por la fórmula del recuadro anterior. Tenemos que

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{y que} \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

El suceso $A \cap B$ corresponde a que nos salga 4, por lo que

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

□

Problema 4. Halla la probabilidad de que un número de 3 cifras cogido al azar sea múltiplo de 5 o múltiplo de 7.

Solución. Para empezar, calcularemos el tamaño del espacio muestral. La primera cifra de un número de 3 cifras puede ser cualquiera menos el 0, las demás no tienen restricciones. En total, hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de tres cifras.

Vamos a usar la fórmula que relaciona las probabilidades de la unión y la intersección. Calcularemos ahora los múltiplos de 5, son exactamente $\frac{1}{5} \cdot 900 = 180$. Los múltiplos de 7 hay que contarlos con cuidado porque el primer múltiplo de 7 mayor de 99 no es 100 sino 105. Como

$$\frac{999-105}{7} = \frac{894}{7} \quad \text{es un número entre 127 y 128,}$$

tenemos que hay exactamente 127 números de 3 cifras que son múltiplos de 7. Los múltiplos de 7 que, además, son múltiplos de 5 son el mayor número entero que es menor o igual que $\frac{999-105}{7 \cdot 5} = \frac{894}{35}$. Como $\frac{894}{35}$ es un número entre 25 y 26, obtenemos que hay 25 números de tres cifras que son múltiplos de 5 y de 7.

Usando la fórmula de la unión y nombrando m_7 al número de los múltiplos de 7 de tres cifras y m_5 a los múltiplos de 5 de tres cifras, obtenemos que

$$P(m_7 \cup m_5) = P(m_7) + P(m_5) - P(m_7 \cap m_5) = \frac{127}{900} + \frac{180}{900} - \frac{25}{900} = \frac{282}{900} = \frac{47}{150} \approx \frac{1}{3}.$$

□

Un caso importante de la fórmula del recuadro anterior es aquel en el que los sucesos A y B son **incompatibles** (es decir, **no pueden suceder a la vez**, o equivalentemente, $P(A \cap B) = 0$). Aplicando la fórmula a este caso, obtenemos lo siguiente.

Si A y B son sucesos **incompatibles**, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Problema 5. Tiramos un dado de 6 caras. Llamamos A al suceso correspondiente a que sale un número par, y B al suceso correspondiente a que sale un número que al dividirlo por 4 nos da resto 1. ¿Son A y B sucesos incompatibles? Calcula $P(A \cup B)$.

Solución. $A =$ "nos sale $2, 4$ o 6", y $B =$ "nos sale 1 o 5". A y B son incompatibles, y

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

□

Definición. Dos sucesos A, B se llaman **independientes** si el hecho de que ocurra A no influye en la probabilidad de que ocurra B.

Podemos considerar independientes, por ejemplo, el hecho de que un científico del ICMAT se tome un café por la mañana y el hecho de que una niña granadina de 1º de Primaria llegue tarde al cole.

Ejemplo resuelto. Hemos lanzado un dado 3 veces y ha salido un 6. ¿Cuál es la probabilidad de que, al volver a lanzarlo, salga un 6?

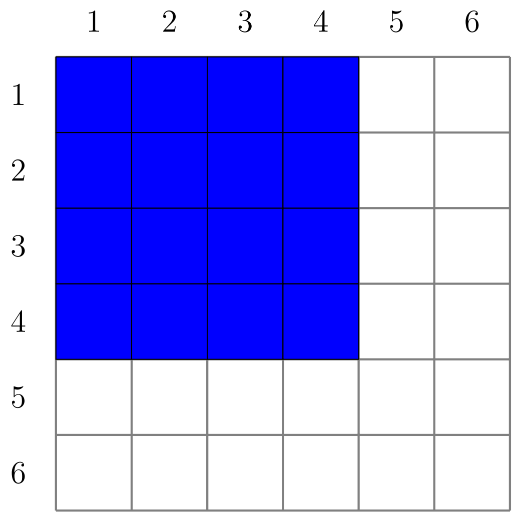
Solución. Este ejemplo es muy importante. Algunos pensarán que si el 6 ha salido ya, entonces es más probable que ahora no salga. Otros dirán que el dado está trucado y la probabilidad de que vuelva a salir un 6 es mayor de $\frac{1}{6}$. En el mundo real no podemos descartar esta posibilidad. Pero en el mundo matemático, donde suponemos que los 6 resultados son equiprobables, la respuesta del 4º lanzamiento **no depende** de los resultados anteriores, sigue siendo $\frac{1}{6}$. El dado no tiene memoria ni tampoco va a intentar mostrarnos una cara diferente para variar. Por eso consideramos que los consecutivos lanzamientos de dado o de moneda son independientes. Lo serían incluso si el dado estuviera trucado. □

Cuando los sucesos A y B son independientes (¡y sólo en ese caso!) podemos usar la **regla del producto** para calcular la probabilidad de que ocurran A y B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ejemplo resuelto. Hallemos la probabilidad de que al lanzar dos dados no salga ningún 5 ni ningún 6.

Solución. Por supuesto, podemos representar el espacio muestral como una tabla de 6×6 y contar las casillas coloreadas:



Pero para 3 lanzamientos de dado tendríamos que hacer un dibujo tridimensional, y para 4 sería ya imposible. Sin embargo, recurriendo a la regla del producto (ya que los lanzamientos son independientes) hallamos la respuesta en una operación, sin necesidad de hacer un dibujo:

$$P(1, 2, 3 \text{ o } 4 \text{ en } 2 \text{ lanzamientos}) = P(1, 2, 3, 4) \cdot P(1, 2, 3, 4) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}. \quad \square$$

Problema 6. Supongamos que entre los alumnos de un colegio un 50% juega al fútbol, un 25% juega al baloncesto y un 5% practica ambos deportes. Los sucesos A=jugar al fútbol y B=jugar al baloncesto ¿son independientes?

Solución. No. $P(A \cap B) = 0,05 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$

$\square$

Sucesos complementarios

A veces es más fácil calcular la probabilidad de que no ocurra un determinado suceso que la probabilidad de que sí ocurra. Para ello, hablaremos de **sucesos complementarios**.

Definición. Si A es un suceso, llamamos A^c a su **suceso complementario**, es decir, A^c significa que **no ocurre** A.

Problema 7. ¿Cuál es el complementario del suceso "en dos lanzamientos de moneda salen 2 caras"? Nómbralo sin usar la palabra "no".

Solución. En dos lanzamientos de moneda sale una cara o ninguna. $\square$

Problema 8. ¿Cuál es el complementario del suceso "en dos lanzamientos de moneda sale al menos una cara"?

Solución. En dos lanzamientos de moneda no sale ninguna cara. $\square$

Si A es un suceso, y A^c es el suceso **complementario**, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} P(A \cup A^c) &= 1 \quad \text{porque siempre ocurrirá } A \text{ o no ocurrirá } A, \\ P(A \cap A^c) &= 0 \quad \text{porque no pueden ocurrir } A \text{ y no } A \text{ a la vez,} \end{aligned}$$

por lo que la fórmula que relaciona la unión y la intersección de sucesos nos dice lo siguiente.

> Si A es un suceso, y A^c es el suceso complementario, entonces
>
> $$P(A) + P(A^c) = 1.$$

Ejemplo resuelto. Encuentra la probabilidad de que en dos lanzamientos de un mismo dado salgan dos números distintos.

Solución. Llamamos A al suceso consistente en que salgan dos números distintos. Entonces, A^c es el suceso consistente en que salgan dos números iguales. El espacio muestral tiene 6^2 elementos. De ellos, 6 tienen los dos números iguales. Por tanto, la fórmula de Laplace nos dice

$$P(A^c) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6},$$

por lo que

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{5}{6}.$$

□

Problema 9. Calcula la probabilidad de que al lanzar 100 veces una moneda nos salga al menos una cara.

Solución. Sea A el suceso correspondiente a que ha salido al menos una cara en las 100 tiradas. Entonces, A^c significa que han salido 100 cruces. Como las tiradas son independientes, tenemos que

$$P(A^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^{100},$$

por lo que

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

□

En el siguiente ejercicio se usan muchas de las técnicas de probabilidad que hemos aprendido hasta ahora, y se puede ver que hay varias maneras de calcular la misma probabilidad con todas las herramientas que tenemos a nuestra disposición. Con la práctica, aprenderemos a elegir las maneras más sencillas.

Problema 10. En este ejercicio vamos a encontrar la probabilidad de que en tres lanzamientos de un mismo dado salgan tres números distintos. Lo vamos a calcular de dos maneras distintas.

Llamamos A al suceso consistente en que los tres números sean distintos, I_3 al suceso consistente en que los tres números sean iguales, y I_2 al suceso consistente en que haya exactamente dos números iguales.

a) Calcula $P(A)$ directamente usando la fórmula de Laplace. Para ello, usa tus conocimientos de combinatoria para calcular el número de casos favorables.

b) Relaciona A^c con $I_3 \cup I_2$. Deduce que $P(A) = 1 - (P(I_3) + P(I_2))$.

c) Calcula $P(I_3)$ usando la fórmula de Laplace.

d) Calcula $P(I_2)$ usando la fórmula de Laplace. Para ello, usa tus conocimientos de combinatoria para calcular el número de casos favorables.

e) Usa la parte b) para calcular $P(A)$ a partir de las probabilidades calculadas en las partes c) y d), y comprueba que obtienes el mismo resultado que en la parte a).

Solución. a) El espacio muestral tiene 6^3 elementos. De ellos, $6 \cdot 5 \cdot 4$ tienen los tres números distintos (6 opciones para el primer lanzamiento, 5 para el segundo, 4 para el tercero). Por tanto,

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

b) Tenemos que

$$A^c = I_3 \cup I_2.$$

Por tanto,

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(I_3 \cup I_2).$$

Además, $P(I_3 \cup I_2)$ se puede calcular con la fórmula que relaciona la unión y la intersección. Notamos que I_2 e I_3 son incompatibles, por lo que $P(I_3 \cup I_2) = P(I_3) + P(I_2)$. Así,

$$P(A) = 1 - (P(I_3) + P(I_2)).$$

c) El espacio muestral tiene 6^3 elementos. De ellos, 6 tienen los tres números iguales, es decir,

$$P(I_3) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

d) Para calcular cuántos de los elementos del espacio muestral tienen exactamente 2 números iguales, usamos lo que sabemos de combinatoria:

- Hay $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ posibilidades de escoger 2 lanzamientos entre tres lanzamientos.
- Hay 6 posibles valores para el número que se repite dos veces en los 2 lanzamientos escogidos, y 5 para el que no se repite en el lanzamiento restante.

Por tanto, hay

$$3 \cdot 6 \cdot 5 = 90 \quad \text{casos con exactamente dos números iguales,}$$

y

$$P(I_2) = \frac{90}{6^3} = \frac{15}{36}.$$

e) Sustituyendo lo obtenido en las partes c) y d) en la fórmula del apartado b), obtenemos que la probabilidad de que salgan tres números distintos en tres lanzamientos es

$$P(A) = 1 - (P(I_3) + P(I_2)) = 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{15}{36}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

□

Ejercicios

Problema 11. Halla la probabilidad de que en 6 lanzamientos de dado salgan

1. 6 resultados distintos

2. 7 resultados distintos

Solución. La primera probabilidad es

$$\frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{2}{6}\right)\left(1 - \frac{3}{6}\right)\left(1 - \frac{4}{6}\right)\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{324} \approx 1,5\%$$

La segunda es igual a 0.

□

Problema 12. En una circunferencia trazamos un diámetro y elegimos 3 puntos al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres puntos estén al mismo lado del diámetro?
2. ¿Solamente dos puntos estén al mismo lado del diámetro?

Solución. Aunque parezca que se trata de la probabilidad geométrica, los sucesos aquí son discretos. Si llamamos una mitad "Cara" y la otra, "Cruz", que un punto caiga en una determinada mitad equivale a lanzar una moneda. En estos términos, buscamos la probabilidad de tres caras en 3 lanzamientos y la de dos caras en 3 lanzamientos. Las respuestas son $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$.

□

Problema 13. Juanito ha cortado con tijeras una cinta métrica de 5 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que la parte larga mida más de 4 metros?

Solución. Es fácil equivocarse pensando que la probabilidad es $\frac{1}{5}$. Recuerda que la cinta tiene dos extremos, por lo que el corte puede estar a menos de un metro de cada uno de ellos. La respuesta correcta es $\frac{2}{5}$.

□

Problema 14. Se lanza el dado 4 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que los números vayan apareciendo por orden, de menor a mayor?

Solución. Si en el primer dado ha salido un 4, un 5 o un 6, ya no puede cumplirse la condición. Si en el primero ha salido un 3, en el segundo tiene que salir un 4, en el tercero, un 5, y en el último, un 6, es decir, tenemos un único caso.

Si en el primer dado ha salido un 2, tenemos 4 órdenes posibles:

$$(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

Por último, si el primer resultado es un 1, hay $\binom{5}{3} = 10$ opciones de elegir 3 números entre $2, 3, 4, 5, 6$. La probabilidad final es $\frac{1+4+10}{6^4} \approx 1\%$

□

Problema 15. El Rey ofrece al prisionero 10 bolas negras, 10 blancas y 2 cajas. Tiene que repartir TODAS las bolas entre dos cajas. Luego el rey elegirá una caja al azar y sacará una bola. Si es negra, el prisionero morirá, si es blanca, será liberado. ¿Puede el prisionero mejorar su suerte?

Solución. Sí. Si coloca una bola blanca en una caja y todas las demás en la otra, la probabilidad de sobrevivir será $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{27}{38}$.

Es algo más difícil demostrar que esta opción es la mejor, para ello se debería dejar k bolas blancas y n bolas negras en la primera caja y maximizar la probabilidad usando la derivada. Pero es sencillo ver que al colocar al menos una bola negra junto con la blanca reduce significativamente la probabilidad de sobrevivir y que colocando varias blancas y una negra es peor que dejar una blanca.

□

Problema 16. De una baraja de 52 cartas se sacan 4. Halla la probabilidad de que sean del mismo palo.

Solución. Después de sacar la primera quedan 51 cartas y 12 del mismo palo. Si esta segunda es del mismo palo, quedan 50 cartas y 11 del mismo palo, luego 49 y 10 del mismo palo. La probabilidad final es $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{49 \cdot 50 \cdot 51} \approx 0,01$

□

Problema 17. A una mesa redonda se sientan 5 chicos y 5 chicas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos vecinos de María sean niñas?

Solución. La probabilidad de que a la derecha de María haya una niña es $\frac{4}{9}$. Ahora quedan 3 niñas que podrían ser sus vecinas izquierdas y 5 niños, de modo que la probabilidad de tener una niña a su izquierda (sabiendo que a su derecha también hay una) es $\frac{3}{8}$. La probabilidad total es el producto de estas dos, $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

□

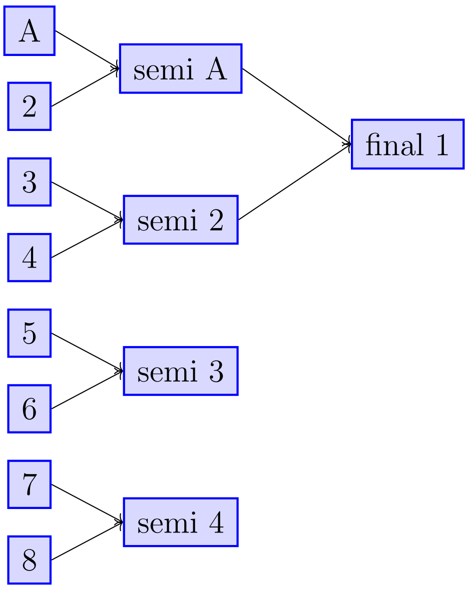
Problema 18. En un saco meten 3 tarjetas con las letras A, B y C y 4 tarjetas con los números $1, 2, 3, 4$. Después van extrayendo al azar las tarjetas. Halla la probabilidad de que las letras vayan apareciendo en orden alfabético y los números, de menor a mayor.

Solución. La probabilidad de que las letras vayan apareciendo por orden es $\frac{1}{3!}$. La de que los números vayan por orden es $\frac{1}{4!}$. Como estos sucesos son independientes, la probabilidad final es igual a $\frac{1}{3! \cdot 4!}$.

□

Problema 19. A los cuartos de final han llegado 8 equipos. Los emparejan de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de estos equipos, A y B, se enfrenten en las semifinales? Suponemos que cada equipo gana con la probabilidad de un medio.

Solución. En los cuartos de final hay 4 parejas de equipos. Para llegar a la semifinal junto con el equipo A hay que entrar en el grupo "semi 2" (con la probabilidad de $\frac{2}{7}$ porque, además de A, hay $8 - 1 = 7$ equipos) y, además, ambos equipos tienen que ganar a su rival. La probabilidad final es $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$



□

Problema 20. Un alumno suspende mates con la probabilidad de $\frac{2}{3}$, suspende lengua con la probabilidad de $\frac{2}{3}$. Sabiendo que siempre suspende al menos una de estas asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido ambas?

Solución.

$$P(\text{Lengua} \cap \text{Mates}) = P(\text{Lengua}) + P(\text{Mates}) - P(\text{Lengua} \cup \text{Mates})$$

$$P(\text{Lengua} \cap \text{Mates}) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{12}$$

□

Problema 21. Estás en un concurso de televisión. Delante de ti hay tres puertas. Detrás están escondidos dos cabras y un coche. Si eliges la puerta del coche, te lo llevas de premio. El presentador sabe dónde está el coche. Después de que elijas una puerta, el presentador abrirá una puerta distinta de la que has elegido tú y te mostrará que detrás de esa hay una cabra. Quedarán dos puertas cerradas, una cabra y un coche detrás. El presentador te dará entonces la opción de seguir con la puerta inicial, o cambiar tu elección. ¿Es mejor seguir optando por la puerta que has elegido inicialmente, cambiar de puerta o da exactamente igual?

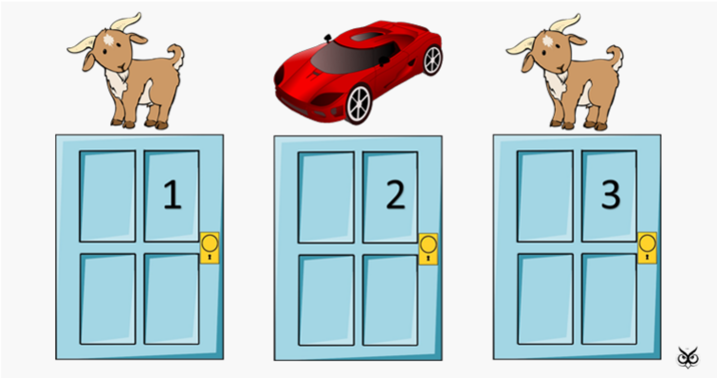


Figura 1: El concurso de Monty Hall

Solución. Es mejor cambiar de puerta. Piensa que inicialmente la probabilidad de acertar es $\frac{1}{3}$, y esta probabilidad no ha cambiado con las acciones del presentador. Por eso la probabilidad de ganar cambiando de puerta es $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, ¡el doble!

Si no te convence, supón que has elegido la puerta número 1. Si el coche realmente está detrás, ganas. Pero si no, tanto si el coche está detrás de la 2 como si está detrás de la 3, ¡ganas al cambiar de puerta! En 2 casos de 3 es mejor cambiar que seguir.

□

Problema 22. En el plano se dibujan 7 puntos tales que no hay tres que estén en una misma línea. Juan elige al azar 3 puntos, Javier, otros 3. ¿Cuál es la probabilidad de que sus triángulos no tengan vértices comunes?

Solución. El espacio muestral para Javier es $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$, la cantidad de maneras de elegir 3 elementos entre 7. De entre estos 7 puntos 3 ya están "reservados", por lo que le quedan 4 puntos libres. La probabilidad que buscamos, por tanto, es

$$P = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$$

□

Problema 23. Alba ha escrito las 4 letras de su nombre en 4 tarjetas distintas, las ha barajado y las ha colocado encima de la mesa. ¿Con qué probabilidad le vuelve a salir su nombre?

Solución. Vamos a llamar las as del nombre "Alba" con subíndices: A_1, A_2. Entre las $4! = 24$ posibles permutaciones de A_1, L, B, A_2 hay solamente 2 resultados favorables: A_1LBA_2, A_2LBA_1. $P = \frac{1}{12}$

□

Problema 24. En la cola del supermercado están Ana, Bea, Carlos y David. Ordena las siguientes probabilidades de menor a mayor

a) Ana sea la primera.

b) Bea no sea la última.

c) Carlos esté delante de David.

d) Carlos y David estén juntos.

e) Bea esté entre Ana y David.

Solución. El espacio muestral en este caso contiene $4! = 24$ elementos, todas las permutaciones de 4 elementos.

a) Si Ana es la primera, los tres restantes pueden formar $3! = 6$ permutaciones, por lo que $P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

b) Es más fácil buscar los casos en los que Bea es la última. Son $24-6 = 18$, de modo que la probabilidad que buscamos es $\frac{3}{4}$

c) Para cualquier disposición de estas 4 personas en la que Carlos está delante de David hay una en la que David y Carlos están intercambiados, y viceversa. Es decir, Carlos está delante en la mitad de los casos, $P = \frac{1}{2}$

d) Pensemos en Carlos y David como si fuera un bloque inseparable. Hay $3! = 6$ permutaciones de 3 elementos (Ana, Bea y Carlos-David), en cada una tenemos dos casos posibles (Carlos delante de David o al revés), lo que nos da 12 casos posibles, $P = \frac{1}{2}$.

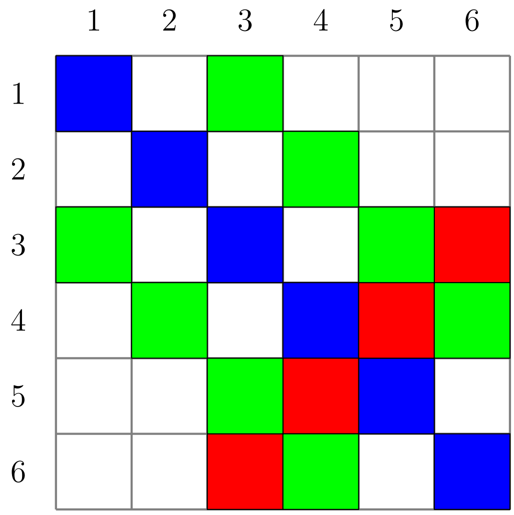
e) Si el orden es Ana-Bea-David, Carlos puede ocupar cualquiera de las 4 posiciones posibles (delante de Ana, delante de Bea, delante de David o detrás de David). Lo mismo para el orden David-Bea-Ana. $P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Vemos que por orden creciente de probabilidad van $a < e < c = d < b$

□

Problema 25. Harry, Ron y Hermione están jugando a los dados. Lanzan dos dados simultáneamente. Harry gana 1 galeón cuando los dados muestran el mismo valor. Ron gana 1 galeón si los dados suman 9. Hermione gana 1 galeón si la resta de los dados da 2. ¿Quién gana más veces y quién menos? Intenta representar las victorias de cada uno en el espacio muestral.

Solución. Representemos los casos en los gana Harry con el color azul, las victorias de Ron con el rojo, y las de Hermione con el verde:



Es fácil ver que Hermione gana 2 veces más que Ron y 1,5 veces más que Harry.

□

Problema 26. En una habitación hay tres cómodas, cada una con dos cajones. En la primera cómoda hay 2 monedas de plata, en la segunda, una de plata y una de oro, y en la tercera, dos monedas de oro, pero no sabemos cuál es cuál. Yo abro un cajón y encuentro exactamente una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar en el otro cajón de la cómoda una moneda de oro?

Solución. Si has empezado pensar en cómodas, tu respuesta con toda seguridad es un medio. Pero piensa que no estamos eligiendo cómodas sino cajones. Entonces hay 3 casos, no 2. En dos de ellos, el otro cajón de la misma cómoda tiene una moneda de oro, por lo que la respuesta correcta es $\frac{2}{3}$.

□

Problema 27. 4 vaqueros colgaron sus sombreros a la entrada del bar, bailaron dando vueltas y se marearon y, al salir del bar, cogieron el primer sombrero que vieron. Busca la probabilidad de que ningún vaquero se haya llevado su propio sombrero.

Solución. Esta probabilidad se encuentra dividiendo la cantidad de desórdenes de 4 elementos entre la de permutaciones. En este caso es igual a $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

□

Problema 28. Ana y Javier tienen dos hijos cada uno. Se sabe que Ana tiene al menos un hijo varón y que el hijo mayor de Javier es varón. ¿Es más probable que Ana tenga dos hijos varones o que Javier tenga dos hijos varones?

Solución. Aunque ambas probabilidades parecen iguales no lo son porque parten de distinto espacio muestral. En el caso de Ana el espacio muestral está formado por 3 opciones distintas:

$$\{(\text{chico}, \text{chica}), (\text{chica}, \text{chico}), (\text{chico}, \text{chico})\},$$

donde la primera coordenada representa al mayor de los dos hijos. En cambio, el de Javier solamente incluye dos:

$$\{(\text{chico}, \text{chica}), (\text{chico}, \text{chico})\}$$

Por tanto, la probabilidad de tener dos hijos varones es mayor para Javier: $\frac{1}{2}$ frente a $\frac{1}{3}$ para Ana.

□

Problema 29. Tres hormigas están en los tres vértices de un triángulo equilátero. Simultáneamente empiezan a moverse a lo largo de los lados eligiendo el lado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 hormigas se encuentren?

Solución. $\frac{3}{4}$. El espacio muestral es tridimensional, en cada dimensión hay 2 opciones (izquierda o derecha). De las $2^3 = 8$ opciones totales las desfavorables son 2: cuando las tres hormigas eligen la misma dirección.

□

Problema 30. En la antigua India cuando dos enamorados de familias enfrentadas querían casarse, tenían que demostrar que su amor era verdadero de la siguiente manera: un juez entrelazaba unas cuantas hebras dejando entrever solamente sus extremos. Los enamorados tenían que atar cada uno de los extremos superiores con uno de los extremos inferiores, si se formaba un único lazo, les permitían casarse, si no, no. Calcula la probabilidad de poder casarse para 3 hebras, n hebras.

Solución. Si nombramos los extremos de arriba y los de abajo con números de 1 a n, cada entrelazamiento de hebras produce una permutación de estos números. Se va a formar un único enlace si la permutación es un ciclo completo en la que ninguna hebra se enlaza consigo misma.

Supongamos que el juez enlaza el extremo de arriba de la hebra 1 con el de abajo de la $h_1 \neq 1$. Esto se puede hacer de $n-1$ maneras. Entonces el extremo de arriba de la hebra h_1 no se puede enlazar ni con 1 ni con h_1 ($n-2$ maneras). Siguiendo este razonamiento, vemos que hay $(n-1)!$ maneras de crear un único enlace entre las $n!$ permutaciones posibles. Por tanto, la probabilidad de que los enamorados se casen es $\frac{1}{n}$.

□