



PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

2023-2024

Juegos

Fecha: 5, 12 y 19 de Abril de 2024

Grupos: Mercurio y Venus

Cuando $x + x = 0$

Una operación binaria es una función que toma dos elementos cualesquiera de un conjunto y devuelve otro elemento del mismo conjunto (“binaria” quiere decir “dos”).

Ejemplo resuelto 1. ¿Cuáles son operaciones binarias? Para las que sí son operaciones, ¿cuál es el conjunto en cada caso (es decir, el dominio)?

- a) La suma /resta /producto /división /potenciación de números naturales /enteros /rationales /reales /complejos (si has visto números complejos).
- b) La operación $\odot$ dada por $x \odot y = 2$ para cualquier $x, y \in \mathbb{N}$.
- c) Sumar 1 a un número.
- d) La concatenación de frases con las palabras “y yo aún diría más”. Por ejemplo, si uso el símbolo $\odot$, tendría que
$$\text{“Llueve”} \odot \text{“Hace sol”} = \text{“Llueve, y yo aún diría más, hace sol.”}.$$
- e) La unión/intersección de conjuntos.
- f) La concatenación de movimientos de un cubo de Rubik. Por ejemplo “Girar la cara de arriba 90 grados a la derecha” $\otimes$ “Seguir las instrucciones de WikiHow” = “Girar la cara de arriba 90 grados a la derecha y después seguir las instrucciones de WikiHow”.

Observa que puedo usar el símbolo que me dé la gana.

Solución. Haz el favor de no crear una gran discusión filosófica sobre esto. Si entiendes qué es una operación, puedes seguir.

- a) La suma y el producto son operaciones en cualquier conjunto de números. La resta no es una operación en el conjunto de naturales, $3 - 5 \notin \mathbb{N}$. La división es una operación en el conjunto de racionales, reales o complejos distintos de 0, pero no lo es si incluimos el 0. Las potencias son una operación en los naturales, pero no en ningún conjunto que contenga el 0 y el -1 (porque 0^{-1} no está definido).
- b) Sí es una operación.
- c) Sumar 1 no es una operación binaria, porque sólo usa un número.
- d) La concatenación sí es una operación en el conjunto de frases.

e) La unión o intersección es una operación¹.

f) También es una operación, en el conjunto de movimientos de un cubo de Rubik.

□

Definición. Una operación binaria $\odot$ en un conjunto es **macanuda**² si cumple todas estas propiedades:

a) La propiedad asociativa, es decir, para cualquier x, y, z , $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.

b) La propiedad conmutativa, es decir, para cualquier x, y , $x \odot y = y \odot x$.

c) Existe un elemento neutro, es decir, existe un elemento e que cumple que para cualquier x , $x \odot e = e \odot x = x$.

d) Todo elemento tiene un inverso, es decir, para cualquier x existe un y que cumple que $x \odot y = y \odot x = e$.

e) Para todo x , $x \odot x = e$.

Problema 1. Convéncete de que los naturales con la suma tienen la propiedad asociativa y conmutativa, pero no tienen elemento neutro ni el inverso.

¿Cuáles de estas propiedades tienen los enteros con la resta? ¿Por qué la respuesta es ninguna?

Problema 2. ¿Alguna de las operaciones del ejemplo 1 ~~da estructura de grupo abeliano de exponente 2 al conjunto correspondiente~~ es macanuda?

Solución. No.

□

Ejemplo resuelto 2. Vamos a llamar $\mathbb{Z}_2$ a los enteros módulo 2, es decir, a $\{0 \text{ (mód 2)}, 1 \text{ (mód 2)}\}$. Recuerda que en $\mathbb{Z}_2$ podemos sumar, restar y multiplicar. ¿Cuáles de estas operaciones son macanudas? Demuéstralo.

Solución. La suma es macanuda. El producto no, porque el elemento neutro es 1 y 0 no tiene inverso. La resta también es macanuda, porque restar es lo mismo que sumar en $\mathbb{Z}_2$.

□

Problema 3. Considera el conjunto {Verdadero, Falso}. Tiene muchas operaciones, que quizás hayas visto en filosofía, por ejemplo, la conjunción (“Verdadero y Falso” es Falso), la disyunción (“Verdadero o Falso” es Verdadero), la implicación (“si Verdadero, entonces Falso” es Falso), la disyunción exclusiva (“o bien Verdadero o bien Falso” es Verdadero). ¿Alguna es macanuda? ¿Cuál o cuáles? Demuéstralo.

Solución. Sólo la disyunción exclusiva es macanuda y su elemento neutro es Falso.

□

Problema 4. Un gif de gatos, como todos sabemos, es una sucesión de ceros y unos (por ejemplo, 0110011111111000111). Demuestra que, en el conjunto de gifs de gatos de longitud fija, por ejemplo, 15, la operación de sumar cada dígito módulo 2 es macanuda.

Solución. Esto es igual que para $\mathbb{Z}_2$.

□

Problema 5. Demuestra que no hace falta comprobar tantas cosas para ver si una operación es macanuda. Demuestra que si una operación cumple la propiedad asociativa, la propiedad conmutativa y la propiedad de que $x \odot x = e$ y esta propiedad:

c') Existe un elemento neutro por la izquierda, es decir, existe un elemento e que cumple que para cualquier x , $e \odot x = x$.

Entonces la operación es macanuda.

¹Y si sabes por qué en realidad no lo es, entonces estás leyendo la hoja equivocada.

²Para los exquitos: Es un grupo abeliano de exponente 2. Llamarla macanuda es una decisión deliberada para no daros tecnicismos con los que podáis asustar al prójimo

Solución. Si tenemos la propiedad c', tenemos que e es el elemento neutro, porque $x \odot e = e \odot x = x$ (aplicando la propiedad conmutativa). El inverso existe, pues el inverso de x es x . $\square$

Problema 6. Demuestra que en un conjunto con una operación macanuda, el elemento neutro es único, es decir, no hay dos elementos distintos con la misma propiedad.

Solución. Si tenemos dos elementos neutros e y e' , entonces

$$e \stackrel{e' \text{ es neutro}}{=} e \odot e' \stackrel{e \text{ es neutro}}{=} e'.$$

$\square$

Problema 7. Demuestra que en un conjunto con una operación macanuda, el elemento inverso es único, es decir, si $x \odot y = e$, entonces $x = y$.

Solución. Si $x \odot y = e$, entonces (te dejo que veas qué propiedad se aplica en cada paso),

$$x = x \odot e = x \odot (x \odot y) = (x \odot x) \odot y = e \odot y = y.$$

$\square$

Problema 8. Demuestra que una operación que cumple estas tres propiedades es automáticamente conmutativa y tiene inverso, y por tanto, es macanuda:

- a) La propiedad asociativa. c) Existe un elemento neutro. e) Para todo x , $x \odot x = e$.

Solución. La propiedad del inverso es automática, porque el inverso de x es x . Lo que nos falta es la conmutativa. Aplicando e) a $x \odot y$, y la propiedad asociativa, tenemos que $x \odot y \odot x \odot y = e$, y multiplicando por x a la izquierda e y a la derecha (¡aún no sabemos que es conmutativa!), tenemos que

$$x \odot x \odot y \odot x \odot y \odot y = x \odot e \odot y$$

Simplificando ambos lados, tenemos que $y \odot x = x \odot y$. $\square$

La operación macanuda en los juegos

Definición. Estos son los juegos con los que vamos a tratar. Tienen que cumplir todas las siguientes propiedades.

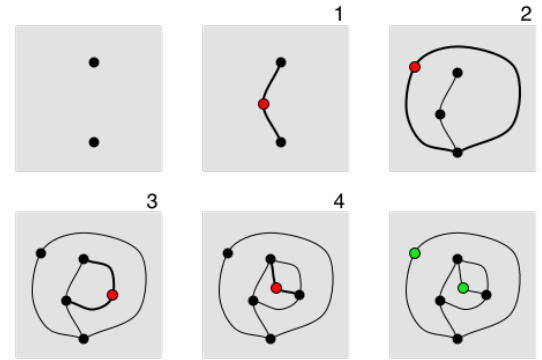
- Hay dos jugadoras, que tienen una relación razonablemente cordial.
- El juego consiste en que las jugadoras se turnan para hacer un “movimiento”, que consiste en transformar el juego de una posición a otra (no hay azar, por ejemplo).
- Pierde la partida quien no puede hacer un movimiento en su turno.
- En una posición dada, ambas jugadoras tienen a su disposición las mismas opciones, si es su turno (el juego es **imparcial**).
- El juego termina siempre en un número finito de pasos.

Problema 9. ¿Cuáles de estos juegos terminan siempre en un número finito de pasos?

- Hay un rey en la casilla (0,0) en un tablero de ajedrez. En cada turno, una jugadora mueve el rey una casilla en cualquier dirección horizontal, vertical o diagonal. Pierde quien no tiene movimientos.
- Hay un virrey en la casilla (0,0) en un tablero de ajedrez. En cada turno, una jugadora mueve el virrey una casilla hacia arriba, la derecha o en diagonal arriba y a la derecha. Pierde quien no tiene movimientos.

- c) El mismo juego del virrey, pero se puede pasar el turno.

El juego de **brotos** (sprouts). Se dibujan unos puntos en una hoja de papel. En tu turno, eliges dos puntos (que pueden ser el mismo) y los unes con una línea de cualquier forma, siempre que no cruce a una línea ya dibujada, ni pase por otro punto. Luego, añades un punto sobre la línea que has dibujado. Nunca se permite que un punto tenga más de 3 líneas que salen de él. Pierde quien no tiene nada que pueda dibujar. Por ejemplo, esta [imagen de Wikipedia](#).



- e) El **nim**. Hay varios montones de palitos. En tu turno, tienes que elegir un montón y quitar entre 0 y todos los palitos de ese montón. Pierde quien no tiene palitos que quitar.
- f) La primera jugadora escribe un número natural. Después, en cada turno, borras el número escrito y escribes uno estrictamente menor. Pierde quien no puede escribir ningún número natural.

Solución. a) No es finito: La partida puede ser "izquierda-derecha-izquierda..." para siempre.

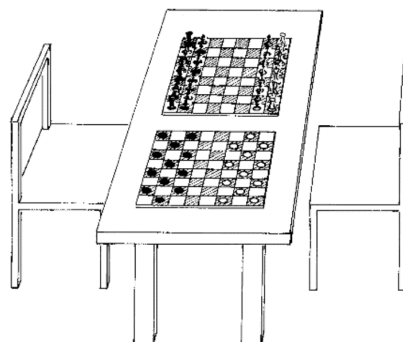
- b) Es finito. Es más, la partida dura como mucho 14 movimientos, porque la partida termina en la casilla (7, 7), y en cada movimiento la suma de las coordenadas aumenta en 1, al menos.
- c) No es finito, porque podrían pasar el turno para siempre.
- d) Es finito. Contamos el número de posibles extremos de tallos que se pueden dibujar aún: si hay n puntos al principio, hay $3n$ extremos totales, tres por cada punto. En cada turno, se usan 2 extremos de 2 puntos (o del mismo), y el nuevo punto tiene un tallo posible, con lo que el número de extremos de tallos disminuye en 1. Por tanto, la partida dura como mucho $3n - 1$ turnos (cuando sólo hay un extremo de tallo, termina).
- e) Es finito, y como mucho dura tantos turnos como el número de palitos.
- f) Es finito. Como máximo dura tantos turnos como el primer número que se escribe. ¡Observa que es finito, aunque su duración puede ser tan larga como queramos (o como quiera la jugadora 1)! □

Como siempre, se trata de saber **quién tiene estrategia ganadora**: quien empieza o quien va segunda. ¿Cuántos de los juegos de arriba sabes resolver?

Problema 10. Da un ejemplo de un juego en el que tenga estrategia ganadora la primera jugadora, y otro en el que tenga estrategia ganadora la segunda jugadora.

Solución. El nim con 1 palo. El nim con 0 palos. □

Definición. Dados dos juegos (o, más bien, dos posiciones dentro de dos juegos), definimos su **suma** como el juego que consiste en poner un juego al lado de otro. En el nuevo juego, en tu turno eliges **uno** de los dos juegos y haces un movimiento en ese juego. Vamos a escribir esta operación como $\oplus$



Por ejemplo, una partida de nim con dos montones es la suma de dos partidas de nim con un montón cada una. Una partida de brotes puede ser la suma de varias partidas, si hay regiones que están desonectadas.

Problema 11. ¿Quién tiene estrategia ganadora en estos casos? Piensa en ejemplos concretos, por ejemplo, de nim.

- a) Si sumas dos juegos en los que la estrategia ganadora la tiene quien va en segundo lugar.
- b) Si sumas un juego en el que gana la primera con un juego en el que gana la segunda.
- c) (Tiene truco) Si sumas dos juegos en los que gana la primera.

Solución. a) Sigue teniendo estrategia ganadora quien va en segundo lugar. Jugamos a la suma de dos juegos y yo voy en segundo lugar. Mi contrincante tiene que elegir uno de los juegos, y hacer una jugada legal (y si no es posible, ha perdido ya). Llamemos J_1 al juego en el que juega mi contrincante, y J_2 al que deja igual. Entonces, J_1 se transforma en otro juego J'_1 , y tenemos en la mesa algún juego $J'_1 \oplus J_2$. En J'_1 , tiene estrategia ganadora la primera jugadora, porque yo podía ganar en J_1 yendo en segundo lugar. Por tanto, hay una jugada en J'_1 que lo transforma en otro juego J''_1 en el que tiene estrategia ganadora la segunda jugadora. Es decir, estamos en la situación anterior. Sigo haciendo esto hasta que a la primera jugadora no le quedan jugadas.

- b) Si sumas un juego en el que gana la primera con un juego en el que gana la segunda. En este caso, gana la primera jugadora: juega la estrategia en el juego en el que tiene estrategia ganadora la primera, y nos quedamos en la situación anterior.
- c) Si sumas dos juegos en los que gana la primera, puede pasar cualquier cosa. Puedes ver que si sumas dos montones de nim, gana la primera si son distintos y la segunda si son iguales.

□

Problema 12. ¿Es la suma de juegos macanuda?

Solución. No parece. Si tiene elemento neutro (yo creo que sí, mira más abajo), desde luego no es verdad que $J \oplus J = e$.

□

Espero que estés de acuerdo en que la suma de juegos es asociativa y conmutativa.

Problema 13. El nombre de Sun Wukong, el Rey Mono, protagonista de *El Viaje al Oeste*, de Wu Cheng'en, se traduce como “consciente del vacío”³. Considera el juego sin movimientos: si es tu turno, pierdes. Convéncete de que es el elemento neutro de la suma de juegos. ¿Quién tiene estrategia ganadora? ¿Es lo mismo que alguna posición de nim? ¿Y de brotes? Convéncete de que el 0 es uno de los mejores inventos de las matemáticas. Contempla el vacío un poco.

Solución. En el juego vacío (por ejemplo, el nim de 0 palos, o brotes sin nada que hacer), pierde quien juega, es decir, gana la segunda jugadora.

∅

□

En un alarde de pedantería podríamos decir que los juegos forman un monoide conmutativo, pero no lo haremos.

Problema 14. Elige una posición de Nim, vamos a llamarla P . Por desgracia para nosotros, $P \oplus P \neq 0$. ¿Quién tiene estrategia ganadora en $P \oplus P$?

Solución. Siempre es la segunda jugadora. Haga lo que haga la primera en un lado de la mesa, la segunda le copia en el otro lado.

□

³La relación que tiene esto con las matemáticas la aprendí en los ejercicios de *Undergraduate Commutative Algebra*, de Miles Reid.

Problema 15 (¡¡¡Importantísimo!!!). Si J es un juego cualquiera (imparcial, finito, etc, es decir, de los que estamos hablando), ¿quién tiene estrategia ganadora en $J \oplus J$?

Solución. Siempre es la segunda jugadora (igual que el nim). □

Problema 16. Mira fijamente tus soluciones de los problemas 11 y 15. ¿Se te ocurre cómo modificar la suma de juegos para que sea macanuda? Si las has mirado muy fijamente y no se te ocurre, sigue leyendo.

Solución. Sigue leyendo. □

Definición. Si a un juego le sumamos otro en el que la segunda jugadora tiene estrategia ganadora, el resultado no cambia.

Vamos a inventarnos una relación entre los juegos en la que los juegos en los que la segunda jugadora tiene estrategia ganadora no importan. La puedes llamar como quieras: decimos que dos juegos J_1 y J_2 son **iguales**, o equivalentes, o igualinchis, o congruentes módulo los juegos que son 0, si en el juego $J_1 \oplus J_2$ tiene estrategia ganadora la **segunda** jugadora.

Problema 17. Voy a llamar $5N$ al juego de nim que es un montón de 5 palitos, y $3N \oplus 4N$ al juego del nim que es un montón de 3 y otro de 4. Demuestra que $1N \oplus 2N = 3N$, $1N \oplus 3N = 2N$, $2N \oplus 3N = 1N$.

Demuestra que $aN = bN$ si y sólo si $a = b$.

Solución. Decir que $1N \oplus 2N = 3N$ es lo mismo que decir que en la partida $1N \oplus 2N \oplus 3N$, gana la segunda jugadora (puedes comprobar todos los casos: quien empieza convierte esta partida en alguna de $2N \oplus 3N$, $1N \oplus 1N \oplus 3N$, $1N \oplus 3N$, $1N \oplus 2N \oplus 2N$, $1N \oplus 1N \oplus 2N$, $1N \oplus 2N$). De este mismo enunciado, podemos sacar gratis las otras dos igualdades $2N \oplus 3N = 1N$ y $1N \oplus 3N = 2N$.

En una partida de dos montones, claramente tiene estrategia ganadora la segunda jugadora si y sólo si los montones son iguales. Esto es lo mismo que decir que $aN = bN$ si y sólo si $a = b$. □

Problema 18. Demuestra que todo juego es igual a sí mismo. Si no ocurriera esto, no merecerían llamarse iguales, ¿no?

Solución. Mira el problema importantísimo. □

Problema 19. Demuestra que si $J_1 = J_2$ y $J_2 = J_3$, entonces $J_1 = J_3$. Si no ocurriera esto, no merecerían llamarse iguales, ¿no?

Solución. Si $J_1 = J_2$ y $J_2 = J_3$, quiere decir que en $J_1 \oplus J_2$ y también en $J_2 \oplus J_3$ tiene estrategia ganadora la segunda jugadora. Por tanto, también la tiene en el juego $J_1 \oplus J_2 \oplus J_2 \oplus J_3$ (por el problema 11). Ahora bien, sumar $J_2 \oplus J_2$ no afecta al resultado, por el mismo problema, así que en $J_1 \oplus J_3$ también tiene que tener estrategia ganadora la segunda jugadora. □

Problema 20. Demuestra que si $J_1 = J'_1$, entonces $J_1 \oplus J_2 = J'_1 \oplus J_2$ para cualquier juego J_2 . Concluye que la suma de juegos módulo la relación igualinchis está bien definida.

Solución. Si $J_1 = J'_1$, quiere decir que en $J_1 \oplus J'_1$, tiene estrategia ganadora la segunda jugadora. Ahora bien, si pensamos en $J_1 \oplus J'_1 \oplus J_2 \oplus J_2$, le estamos sumando un juego ($J_2 \oplus J_2$) en el que tiene estrategia ganadora la segunda jugadora también, así que en la suma de 4 juegos tiene estrategia ganadora la segunda. Esto es decir que $J_1 \oplus J_2 = J'_1 \oplus J_2$. □

Problema 21. Demuestra que la suma de juegos (o más bien, de clases de juegos “iguales”) es macanuda.

Solución. Nos hemos creído la propiedad asociativa. La propiedad $J \oplus J = 0$ la hemos hecho más arriba, y el neutro también. Hemos visto (en el Problema 8) que con esto nos basta. □

Resolver el nim

¿En la posición $2024N \oplus 2023N \oplus 2022N$, quién gana? Vamos a hacernos expertxs en nim.

Problema 22. Resuelve el nim de un montón, es decir, di en qué partidas de nim con un montón tiene estrategia quien empieza o quien va segunda.

Resuelve el nim de dos montones.

Problema 23. Recuerda que una posición que es 0 es una posición en la que gana la segunda jugadora (es decir, ganadora). Completa las frases con 0 (o ganadora)/no 0 (o perdedora)/siempre/nunca:

De una posición que es 0 (ganadora)	siempre/nunca	hay un movimiento que la transforma en
una posición	ganadora/perdedora	
De una posición que es no 0 (perdedora)	siempre/nunca	hay un movimiento que la transforma
en una posición	ganadora/perdedora	

Ejemplo resuelto 3. Encuentra todas las posiciones ganadoras de nim con tres montones que puedas. Recuerda que una posición que es 0 es una posición en la que gana la segunda jugadora (es decir, ganadora).

Intenta dibujar un grafo en el que se pueda ver de qué posición se puede ir a cuál. Para ver que una posición es perdedora, sólo tienes que encontrar un movimiento a una posición ganadora.

Si te rindes o se te acaba el papel, mira el grafo de la siguiente página. Están dibujadas en rectángulos azules algunas posiciones ganadoras. De ellas, están todos los posibles movimientos, y se muestra a qué posición ganadora se puede ir desde ellos. Las que tienen sólo 2 montones están sin dibujar, y las que tienen 2 montones iguales están sin completar (ejercicio).

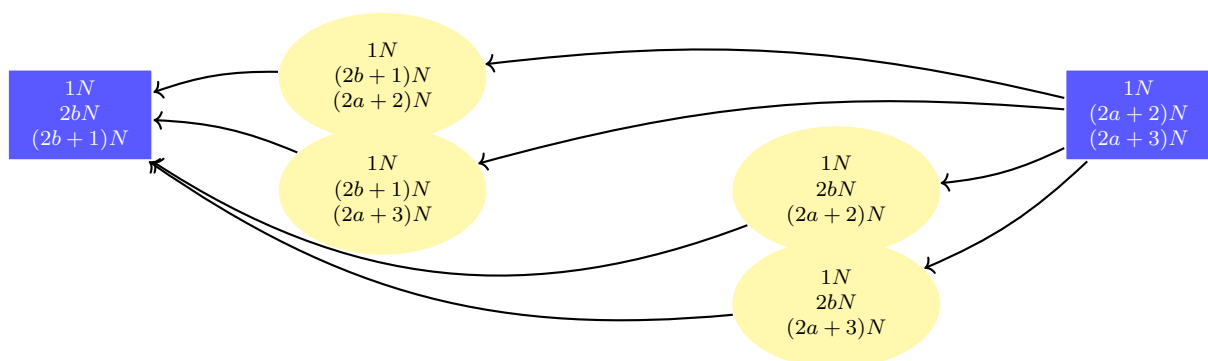
Problema 24. Resuelve estas partidas de nim, para a cualquier número natural.

$$1N \oplus aN \oplus (a+1)N$$

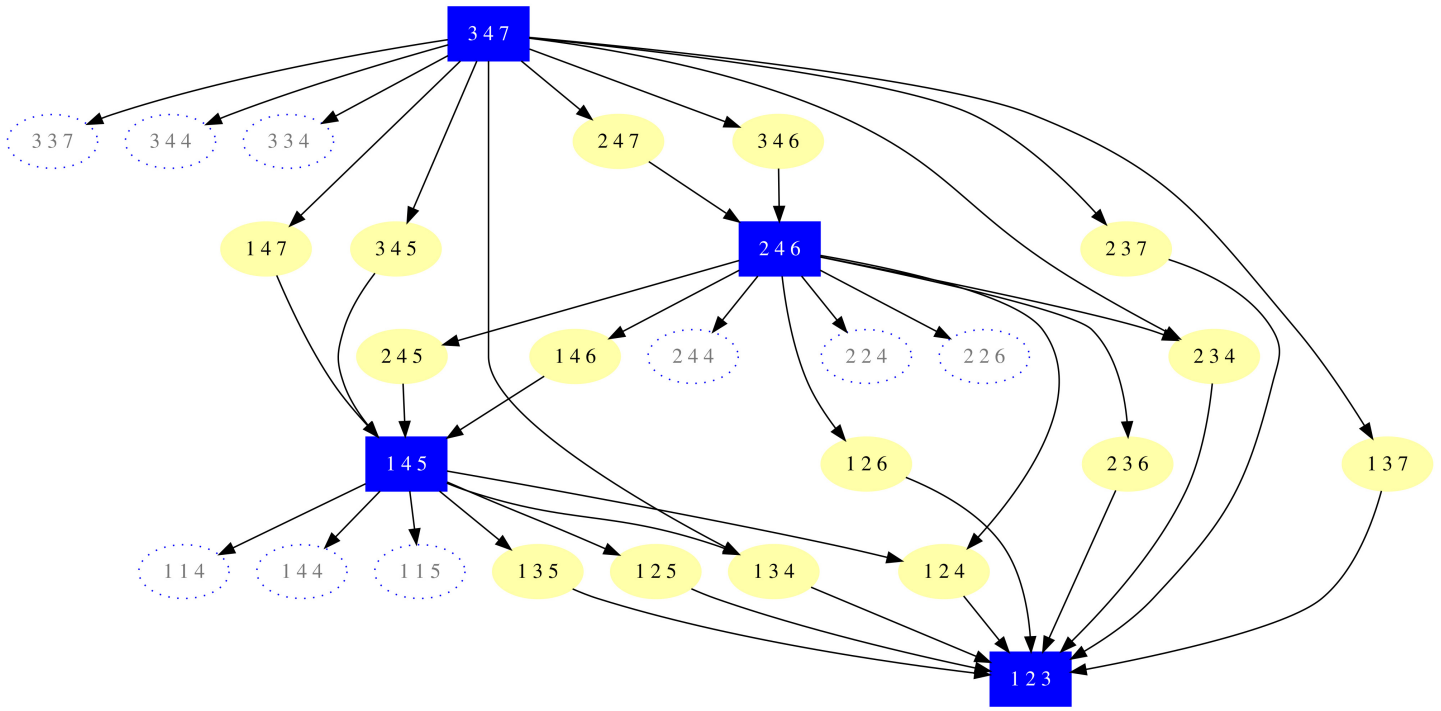
Te recomiendo que empieces por $a = 0, 1, 2, \dots$

Pistas: Dibuja un grafo en el que se vea de qué posición de esta forma se puede llegar a otra.

Solución. Probando, se puede ver que en $1N \oplus 2N \oplus 3N$ gana la segunda jugadora, y en $1N \oplus 3N \oplus 4N$ gana la primera, pues la puede convertir en la anterior. También se puede ver que en $1N \oplus 4N \oplus 5N$ gana la segunda jugadora, pues la primera jugadora sólo puede dejar dos montones iguales (y perder) o dejar una posición desde la que se puede llegar a $1N \oplus 2N \oplus 3N$. Por tanto, en $1N \oplus 5N \oplus 6N$ gana la primera jugadora, que puede conseguir $1 \oplus 4N \oplus 5N$. ¿Puede ser que gane la primera jugadora si y sólo si a es impar?



Podemos demostrar esto por inducción. Con el grafo de arriba, convéncete de que si la posición $1N \oplus 2bN \oplus (2b+1)N$ es ganadora para cualquier $b \leq a$, entonces también lo es la posición $1N \oplus (2a+2)N \oplus (2a+3)N$, porque estas son todas las jugadas que se pueden hacer, y son perdedoras (no he escrito la posibilidad de quitar un montón entero o dejar dos montones iguales, que pierden más claramente). Si estas posiciones son ganadoras, entonces $1N \oplus (2b+1)N \oplus (2b+2)N$ son perdedoras, porque desde ellas la primera jugadora puede llegar a $1N \oplus 2bN \oplus (2b+1)N$. $\square$



Posiciones del nim

Problema 25. Muestra que $1N \oplus aN$ es equivalente a un juego de nim de un sólo montón y calcula cuáles es.

Solución. Si a es par, hemos visto que en $1N \oplus aN \oplus (a+1)N$ gana la segunda jugadora, lo cual quiere decir que $1 \oplus aN = (a+1)N$. Entonces, si a es impar, $1N \oplus aN = (a-1)N$. $\square$

Problema 26. Resuelve estas partidas de nim, para a y b cualquier número natural. Pista: ¿ $1 \oplus a$?

$$1N \oplus aN \oplus bN.$$

Solución. Tenemos que

$$1N \oplus aN \oplus bN = \left\{ \begin{array}{ll} (a+1)N & \text{si } a \equiv 0 \pmod{2} \\ (a-1)N & \text{si } a \equiv 1 \pmod{2} \end{array} \right\} \oplus bN.$$

Esto es 0 (es decir, gana la segunda jugadora), si y sólo si a es par y $b = a+1$ o a es impar y $b = a-1$. $\square$

Problema 27. Calcula (como un solo montón de nim)

$$2N \oplus 0N, 2N \oplus 1N, 2N \oplus 2N, 2N \oplus 3N, 2N \oplus 4N, \dots$$

Calcula $2N \oplus aN$ para cualquier a .

Solución. Tenemos de antes que $2N \oplus 0N = 2N$, $2N \oplus 1N = 3N$, $2N \oplus 2N = 0N$, $2N \oplus 3N = 1N$. Ahora bien, en $2N \oplus 4N \oplus 5N$, gana la primera jugadora, porque puede llegar a $1N \oplus 4N \oplus 5N$. O, lo que es lo mismo, $4N \oplus 5N = 1N \neq 2N$. Así que $2N \oplus 4N \neq 5N$. En $2N \oplus 4N \oplus 6N$, gana la segunda jugadora (está en el grafo de antes), así que $2N \oplus 4N = 6N$. Con esto, podemos seguir sumando:

$$2N \oplus 5N = 2N \oplus 1N \oplus 4N = 6N \oplus 1N = 7N,$$

$$2N \oplus 6N = 4N, 2N \oplus 7N = 5N.$$

Quizás se nos ocurra la conjetura de que $2N \oplus 4aN = (4a + 2)N$. Si eso ocurre, entonces

$$2N \oplus (4a + 1)N = 2N \oplus 4aN \oplus 1N = (4a + 2)N \oplus 1N = (4a + 3)N$$

Y, despejando, tenemos que $2N \oplus (4a + 2)N = 4aN$, y $2N \oplus (4a + 3)N = (4a + 1)N$.

Para demostrar esta conjetura por inducción, vamos a ver que la posición $2N \oplus 4aN \oplus (4a + 2)N$ es ganadora (para la segunda jugadora). Basta ver que no se puede llegar a una posición que sea 0: se puede llegar a (ignorando las opciones con dos montones iguales, o sólo dos montones)

$$\begin{aligned} 1N \oplus 4aN \oplus (4a + 2)N &= (4a + 1)N \oplus (4a + 2)N \neq 0, \\ 2N \oplus (4aN) \oplus (4a + 1)N &= 2N \oplus 1N \neq 0N \\ 2N \oplus bN \oplus (4a + 2)N, &\text{ o} \\ 2N \oplus (4aN) \oplus bN. \end{aligned}$$

en las dos últimas, para algún $b < 4a$, ahora bien, por hipótesis de inducción, $2N \oplus bN = xN$, con $x < 4a$, así que en ningún caso sale 0. Esto demuestra lo que queremos. $\square$

Problema 28. Calcula $3N \oplus aN$ para cualquier a . Por cierto, ¿cuánto es $1N \oplus 2N$?

Solución. Sabemos que

$$1N \oplus aN = \begin{cases} a + 1 & \text{si } a \equiv 0 \pmod{2} \\ a - 1 & \text{si } a \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad 2N \oplus aN = \begin{cases} a + 2 & \text{si } a \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ a - 2 & \text{si } a \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Como $3N = 1N + 2N$, podemos juntar ambas sumas, y tenemos que

$$3N \oplus aN = \begin{cases} a + 3 & \text{si } a \equiv 0 \pmod{4} \\ a + 1 & \text{si } a \equiv 1 \pmod{4} \\ a - 1 & \text{si } a \equiv 2 \pmod{4} \\ a - 3 & \text{si } a \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$\square$

Problema 29. Demuestra que, para todo a ,

$$aN \oplus 4N = \begin{cases} a + 4 & \text{si } a \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{8} \\ a - 4 & \text{si } a \equiv 4, 5, 6, 7 \pmod{8} \end{cases}$$

Solución. Ya hemos calculado cuánto da sumar entre $0N$ y $4N$ a $4N$. Para $a = 0, 1, 2, 3$, tenemos que $aN \oplus 4N = (a + 4)N$, así que para $a = 4, 5, 6, 7$, $aN \oplus 4N = (a - 4)N$. Esto nos puede servir de base para la inducción. Igual que antes: sabemos que $4aN \oplus 4N \neq 0N, 1N, 2N, 3N$, porque sabemos sumar $0N, 1N, 2N, 3N$. Queremos ver que $4N \oplus 4aN \oplus (4a + 4)N = 0$, viendo que todos los posibles movimientos desde aquí son perdedores. Son estos:

$$\begin{aligned} \{0N, 1N, 2N, 3N\} \oplus 4aN \oplus (4a + 4)N &= (4a + \{0, 1, 2, 3\})N + (4a + 4)N \neq 0, \\ 4N \oplus \underset{(<4a)}{b} N \oplus (4a + 4)N &= \underset{(<4a)}{b'} N \oplus (4a + 4)N \neq 0 \\ 4N \oplus 4aN \oplus (4a + \{0, 1, 2, 3\})N &= 4N \oplus +\{0, 1, 2, 3\}N \neq 0 \\ 4N \oplus 4aN \oplus \underset{(<4a)}{b} N &= \underset{(<4a)}{b'} N \oplus 4aN \neq 0. \end{aligned}$$

Efectivamente, $4N \oplus 4aN = (4a + 4)N$. Con la propiedad asociativa, podemos calcular todas las demás. $\square$

Problema 30. Escribe fórmulas para sumar a cualquier montón $5N, 6N$ y $7N$

Proof. Usando que $5N = 1N \oplus 4N$, $6N = 2N \oplus 4N$, $7N = 3N \oplus 4N$,

$$aN \oplus 5N = \begin{cases} a+5 & \text{si } a \equiv 0, 2 \pmod{8} \\ a+3 & \text{si } a \equiv 1, 3 \pmod{8} \\ a-3 & \text{si } a \equiv 4, 6 \pmod{8} \\ a-5 & \text{si } a \equiv 5, 7 \pmod{8} \end{cases} \quad aN \oplus 6N = \begin{cases} a+6 & \text{si } a \equiv 0, 1 \pmod{8} \\ a+2 & \text{si } a \equiv 2, 3 \pmod{8} \\ a-2 & \text{si } a \equiv 4, 5 \pmod{8} \\ a-6 & \text{si } a \equiv 6, 7 \pmod{8} \end{cases}$$

$$aN \oplus 7N = \begin{cases} a+7 & \text{si } a \equiv 0 \pmod{8} \\ a+5 & \text{si } a \equiv 1 \pmod{8} \\ a+3 & \text{si } a \equiv 2 \pmod{8} \\ a+1 & \text{si } a \equiv 3 \pmod{8} \end{cases} \quad \begin{cases} a-7 & \text{si } a \equiv 7 \pmod{8} \\ a-5 & \text{si } a \equiv 6 \pmod{8} \\ a-3 & \text{si } a \equiv 5 \pmod{8} \\ a-1 & \text{si } a \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

□

Problema 31. Escribe la tabla de sumar del $0N$ a $7N$.

Solución. (No escribo N s)

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

□

Problema 32. Escribe la misma tabla de sumar, pero escribe los números en base 2.

Solución. Es la tabla de sumar gifs de gatos (Problema 4)

$\oplus$	000	001	010	011	100	101	110	111
000	000	001	010	011	100	101	110	111
001	001	000	011	010	101	100	111	110
010	010	011	000	001	110	111	100	101
011	011	010	001	000	111	110	101	100
100	100	101	110	111	000	001	010	011
101	101	100	111	110	001	000	011	010
110	110	111	100	101	010	011	000	001
111	111	110	101	100	011	010	001	000

□

Problema 33. Supón que en una posición de nim se pueden hacer movimientos que transformen la posición en $0N, 1N, \dots, (a-1)N$, pero no en aN , para algún a . Encuentra el valor de esa posición.

Solución. El valor es aN . Llamemos a esta posición J , y vamos a demostrar que en $J \oplus aN$, gana la segunda jugadora. En esta posición, la primera jugadora puede convertir la partida en $J \oplus bN$, con $b < a$, que es una posición perdedora (porque entonces la convertimos en $bN \oplus bN$), o en $J' \oplus aN$, para algún J' . Si ocurriera que en $J' \oplus aN$ perdemos (en nuestro turno), significaría que $J' \oplus aN = 0$, y que por tanto $J' = aN$. Como asumimos que $J' \neq aN$, en cualquier posición tenemos estrategia ganadora. □

Problema 34. Resuelve el nim. Explica quién tiene estrategia ganadora en cualquier posición, y cuál es.

Solución. Se trata de sumar en base 2 sin llevar, es decir, igual que en el Problema 4. Hemos visto que esto se cumple al menos hasta $7N$. Una manera de demostrar esto es por inducción: supongamos que hemos demostrado que la suma es así para números menores que 2^a (lo hemos demostrado para $a = 3$). Veamos que si $b < 2^a$, entonces $bN \oplus 2^a N = (b + 2^a)N$, es decir, que $bN \oplus 2^a N \oplus (b + 2^a)N = 0$. Vamos a demostrar esto por inducción en b : Está claro para $b = 0$. Desde esta posición, tenemos estas posibilidades:

- Para algún $b' < b$, $b'N \oplus 2^a N \oplus (b + 2^a)N$. Por hipótesis de inducción en b , tenemos que

$$b'N \oplus 2^a N \oplus (b + 2^a)N = (b' + 2^a)N \oplus (b + 2^a)N \neq 0.$$

- Para algún $c < 2^a$, $bN \oplus cN \oplus (b + 2^a)N$. Por hipótesis de inducción en a , $bN \oplus cN = dN$, con $d < 2^a$, y por tanto

$$bN \oplus cN \oplus (b + 2^a)N = dN \oplus (b + 2^a)N \neq 0.$$

- Para algún $b' < b$, $bN \oplus 2^a N \oplus (b' + 2^a)N$. Por hipótesis de inducción en b , tenemos que

$$bN \oplus 2^a N \oplus (b' + 2^a)N = bN \oplus 2^a N \oplus b'N \oplus 2^a N = bN \oplus b'N \neq 0.$$

- Para algún $c < 2^a$, $bN \oplus 2^a N \oplus cN$. Por hipótesis de inducción en a , $bN \oplus cN = dN$, con $d < 2^a$, y por tanto

$$bN \oplus 2^a N \oplus cN = dN \oplus 2^a N \neq 0.$$

Con esto, ya está. □

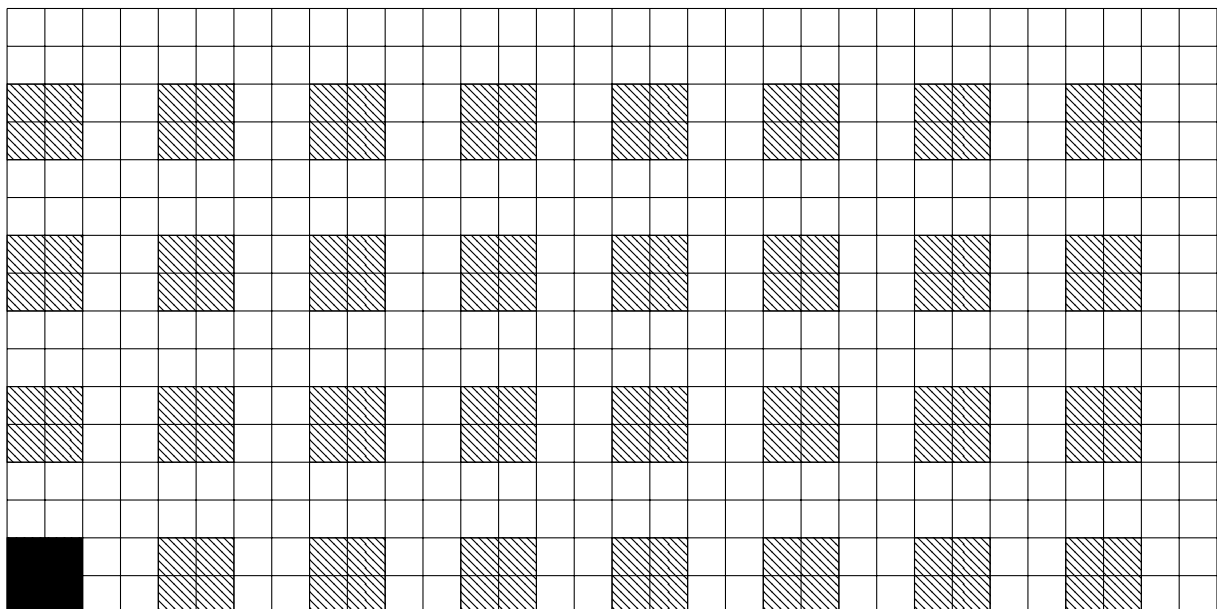
Problema 35. Resuelve el **extreme ultimate nim: the revenge**. Las reglas de extreme ultimate nim: the revenge son las mismas que las del nim, pero además a un montón con 3 palos se le pueden añadir 2 palos en vez de quitar alguno. Sólo se puede hacer esto una vez por montón en cada partida (así que también es finito).

Más juegos

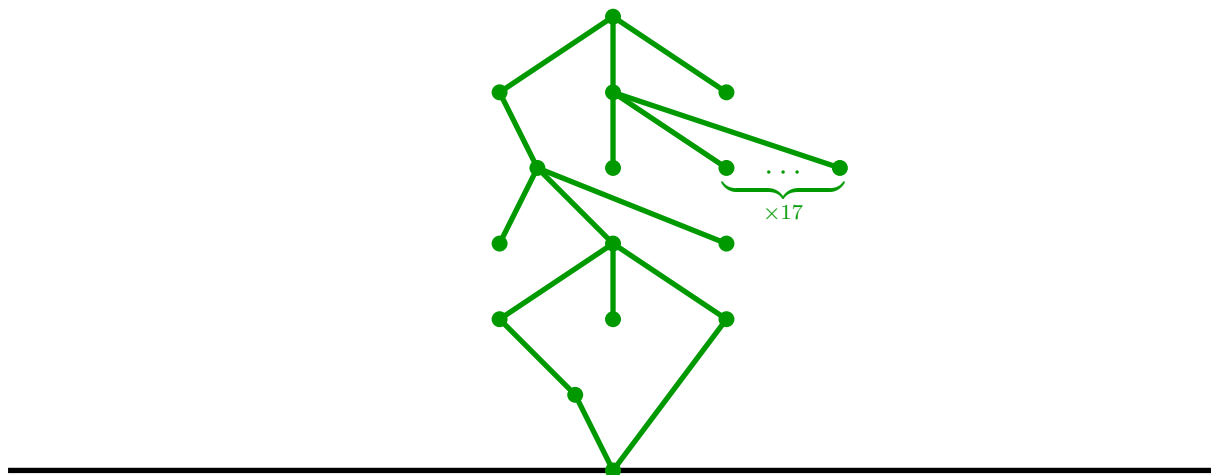
Problema 36. Supón que en una posición de algún juego se pueden hacer movimientos que transformen la posición en un juego equivalente a $0N, 1N, \dots, (a - 1)N$, pero no en aN , para algún a . Encuentra el valor de esa posición. (Recuerda el problema 33)

Problema 37. Hay un caballo en la casilla (a, b) . En tu turno, puedes mover el caballo a una casilla en la que el valor de $a + b$ disminuya (es decir, $(a - 2, b \pm 1)$ o $(a \pm 1, b - 2)$). Gana quien coloca el caballo en las 4 casillas de la esquina inferior izquierda, es decir, en $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ o $(1, 1)$. Encuentra en qué posiciones del tablero gana la primera jugadora y en cuáles la segunda.

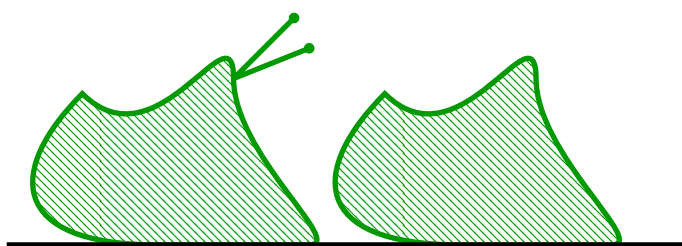
Solución. Las posiciones ganadoras son las coloreadas (la esquina final es la inferior izquierda):



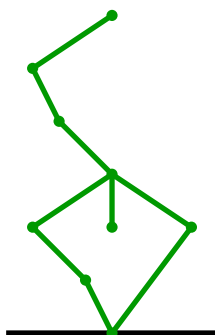
Problema 38. En el juego de **Hackenbush verde**⁴ hay un seto, que es un grafo que está conectado al suelo. En tu turno, podas una rama (quitas una arista), y borras toda la parte del grafo que queda desconectada del suelo. Por supuesto, pierde quien no tiene nada que cortar. Encuentra el valor de nim de este árbol (genealógico):



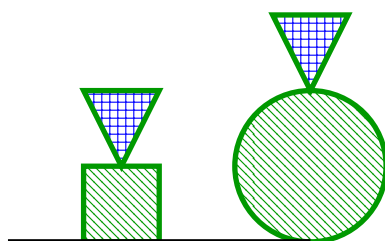
Solución. Observa que para cualquier árbol, si sobresalen dos ramas del mismo sitio, dan igual, es decir, en esta partida gana la segunda jugadora:



Si quitamos todos los pares de ramas emparejadas, nos quedamos con este árbol:

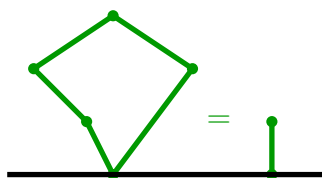


Es más, demuestra que si dos árboles A_1 y A_2 tienen el mismo valor-nim, y hacemos un injerto (en el sentido de jardinería) de otro árbol B en ambos, los árboles resultantes tienen el mismo valor. Es decir, convéncete de que este árbol vale 0, es decir, gana la segunda jugadora. La estrategia es jugar en verde (rayado) si la primera juega en verde, y jugar en azul (con cuadrícula) si la primera juega en azul.

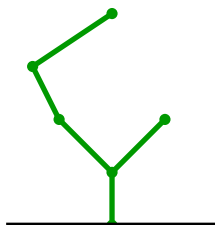


Entonces, podemos demostrar que

⁴No nos atrevemos a jugar a las modalidades azul-roja o, aún peor, azul-roja-verde.



Porque del árbol de la izquierda podemos llegar a 0, 2, 4, es decir, si valor es 1. Entonces, el árbol original es equivalente a



Y podemos ver que desde este árbol se puede llegar a 0, 1, 2, 4, así que vale 3 (como predijeron los pergaminos de Melquíades). $\square$

Problema 39. Encuentra a qué montones de nim equivalen los juegos de brotes con 1 o 2 puntos. ¿Te atreves con 3? Yo no. O, si no has leído la parte del nim, decide quién tiene estrategia ganadora.

Solución. Con 1 punto, la partida siempre dura 2 jugadas, así que siempre gana la segunda jugadora y es 0. Con 2 puntos hay bastantes más posibilidades. Aquí están las posibles posiciones (faltan algunas que son equivalentes, y las últimas están completamente esquemáticas):

Turno 1: a)

b)

Turno 2: a)

b)

c)

d)

e)

f)

a)

b)

c)

d)

e)

Turno 3:

f)

g)

h)

i)

j)

Turno 4: a)

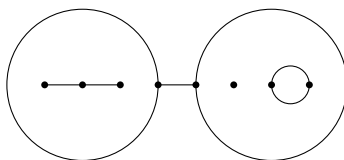
b)

Ahora, podemos por ejemplo hacer una tabla encontrando los valores, empezando por el final:

Posición	Movimientos posibles	Valor de los movimientos posibles	Valor de nim
4a	Ninguno		0
4b	0	0	1
3a	4a	0	1
3b	4a, 4b	0,1	2
3c	4a	0	1
3d	4b	1	0
3e	4a, 4b	0,1	2
3f	4a, 4b	0,1	2
3g	4a, 4b	0,1	2
3h	4a, 4b	0,1	2
3i	4b	1	0
3j	4b	1	0
2a	3a, 3b	1,2	0
2b	3c, 3d, 3e, 3f	1,0,2,2	3
2c	3b,3d,3f,3j	2, 0, 2, 0	1
2d	3h	2	0
2e	3h, 3i	2, 0	1
2f	3j, 4b	0,1	2
1a	2a, 2b, 2c	0, 3, 1	2
1b	2c, 2d, 2e ,2f	1,0,1,2	3

a la primera jugadora, en la posición inicial, las jugadas posibles son 2 y 3, así que gana la segunda jugadora. $\square$

Problema 40. Explica cómo ganar esta partida de brotes (¿en qué posición hay que jugar?):



Solución. Esta partida es la suma de dos partidas que están en cada círculo, que según nuestras cuentas de antes son equivalentes a $2N$ y $3N$. Por tanto, para ganar queremos jugar primero y transformar $3N$ en $2N$: tenemos que unir el punto aislado consigo mismo. $\square$