Juegos

Fecha: 5, 12 y 19 de Abril de 2024 **Grupos: Mercurio y Venus**

Cuando $\mathbf{x+x=0}$

Una operación binaria es una función que toma dos elementos cualesquiera de un conjunto y devuelve otro elemento del mismo conjunto ("binaria" quiere decir "dos").

Ejemplo resuelto 1. ¿Cuáles son operaciones binarias? Para las que sí son operaciones, ¿cuál es el conjunto en cada caso (es decir, el dominio)?

a) La suma /resta /producto /división /potenciación de números naturales /enteros /racionales /reales /complejos (si has visto números complejos).

b) La operación $\oslash$ dada por $x \oslash y = 2$ para cualquier $x, y \in \mathbb{N}$.

c) Sumar 1 a un número.

d) La concatenación de frases con las palabras "y yo aún diría más". Por ejemplo, si uso el símbolo $\odot$, tendría que

"Llueve" $\odot$ "Hace sol" = "Llueve, y yo aún diría más, hace sol.".

e) La unión/intersección de conjuntos.

f) La concatenación de movimientos de un cubo de Rubik. Por ejemplo "Girar la cara de arriba 90 grados a la derecha" $\otimes$ "Seguir las instrucciones de WikiHow" = "Girar la cara de arriba 90 grados a la derecha y después seguir las instrucciones de WikiHow".

Observa que puedo usar el símbolo que me dé la gana.

Solución. Haz el favor de no crear una gran discusión filosófica sobre esto. Si entiendes qué es una operación, puedes seguir.

a) La suma y el producto son operaciones en cualquier conjunto de números. La resta no es una operación en el conjunto de naturales, $3-5 \notin \mathbb{N}$. La división es una operación en el conjunto de racionales, reales o complejos distintos de 0, pero no lo es si incluimos el 0. Las potencias son una operación en los naturales, pero no en ningún conjunto que contenga el 0 y el -1 (porque 0^{-1} no está definido).

b) Sí es una operación.

c) Sumar 1 no es una operación binaria, porque sólo usa un número.

d) La concatenación sí es una operación en el conjunto de frases.

e) La unión o intersección es una operación[1].

f) También es una operación, en el conjunto de movimientos de un cubo de Rubik.

□

Definición. Una operación binaria $\odot$ en un conjunto es **macanuda**[2] si cumple todas estas propiedades:

a) La propiedad asociativa, es decir, para cualquier x, y, z, $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.

b) La propiedad conmutativa, es decir, para cualquier x, y, $x \odot y = y \odot x$.

c) Existe un elemento neutro, es decir, existe un elemento e que cumple que para cualquier x, $x \odot e = e \odot x = x$.

d) Todo elemento tiene un inverso, es decir, para cualquier x existe un y que cumple que $x \odot y = y \odot x = e$.

e) Para todo x, $x \odot x = e$.

Problema 1. Convéncete de que los naturales con la suma tienen la propiedad asociativa y conmutativa, pero no tienen elemento neutro ni el inverso.

¿Cuáles de estas propiedades tienen los enteros con la resta? ¿Por qué la respuesta es ninguna?

Problema 2. ¿Alguna de las operaciones del ejemplo 1 ~~da estructura de grupo abeliano de exponente 2 al conjunto correspondiente~~ es macanuda?

Ejemplo resuelto 2. Vamos a llamar $\mathbb{Z}_2$ a los enteros módulo 2, es decir, a $\{0 \pmod 2, 1 \pmod 2\}$. Recuerda que en $\mathbb{Z}_2$ podemos sumar, restar y multiplicar. ¿Cuáles de estas operaciones son macanudas? Demuéstralo.

Solución. La suma es macanuda. El producto no, porque el elemento neutro es 1 y 0 no tiene inverso. La resta también es macanuda, porque restar es lo mismo que sumar en $\mathbb{Z}_2$. □

Problema 3. Considera el conjunto $\{\text{Verdadero}, \text{Falso}\}$. Tiene muchas operaciones, que quizás hayas visto en filosofía, por ejemplo, la conjunción ("Verdadero y Falso" es Falso), la disyunción ("Verdadero o Falso" es Verdadero), la implicación ("si Verdadero, entonces Falso" es Falso), la disyunción exclusiva ("o bien Verdadero o bien Falso" es Verdadero). ¿Alguna es macanuda? ¿Cuál o cuáles? Demuéstralo.

Problema 4. Un gif de gatos, como todos sabemos, es una sucesión de ceros y unos (por ejemplo, 011001111111111000111). Demuestra que, en el conjunto de gifs de gatos de longitud fija, por ejemplo, 15, la operación de sumar cada dígito módulo 2 es macanuda.

Problema 5. Demuestra que no hace falta comprobar tantas cosas para ver si una operación es macanuda. Demuestra que si una operación cumple la propiedad asociativa, la propiedad conmutativa y la propiedad de que $x \odot x = e$ y esta propiedad:

c') Existe un elemento neutro por la izquierda, es decir, existe un elemento e que cumple que para cualquier x, $e \odot x = x$.

Entonces la operación es macanuda.

Problema 6. Demuestra que en un conjunto con una operación macanuda, el elemento neutro es único, es decir, no hay dos elementos distintos con la misma propiedad.

Problema 7. Demuestra que en un conjunto con una operación macanuda, el elemento inverso es único, es decir, si $x \odot y = e$, entonces $x = y$.

Problema 8. Demuestra que una operación que cumple estas tres propiedades es automáticamente conmutativa y tiene inverso, y por tanto, es macanuda:

[1] Y si sabes por qué en realidad no lo es, entonces estás leyendo la hoja equivocada.

[2] Para los exquisitos: Es un grupo abeliano de exponente 2. Llamarla macanuda es una decisión deliberada para no daros tecnicismos con los que podáis asustar al prójimo

a) La propiedad asociativa. c) Existe un elemento neutro. e) Para todo x, $x \odot x = e$.

La operación macanuda en los juegos

Definición. Estos son los juegos con los que vamos a tratar. Tienen que cumplir todas las siguientes propiedades.

- Hay dos jugadoras, que tienen una relación razonablemente cordial.
- El juego consiste en que las jugadoras se turnan para hacer un "movimiento", que consiste en transformar el juego de una posición a otra (no hay azar, por ejemplo).
- Pierde la partida quien no puede hacer un movimiento en su turno.
- En una posición dada, ambas jugadoras tienen a su disposición las mismas opciones, si es su turno (el juego es **imparcial**).
- El juego termina siempre en un número finito de pasos.

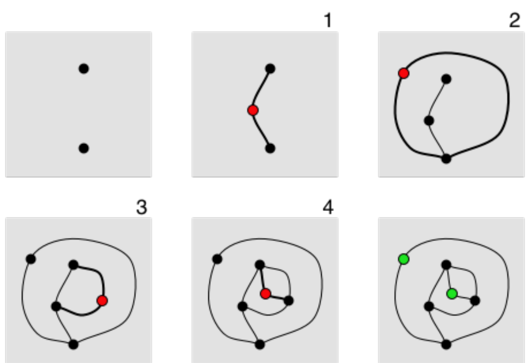
Problema 9. ¿Cuáles de estos juegos terminan siempre en un número finito de pasos?

a) Hay un rey en la casilla $(0, 0)$ en un tablero de ajedrez. En cada turno, una jugadora mueve el rey una casilla en cualquier dirección horizontal, vertical o diagonal. Pierde quien no tiene movimientos.

b) Hay un virrey en la casilla $(0, 0)$ en un tablero de ajedrez. En cada turno, una jugadora mueve el virrey una casilla hacia arriba, la derecha o en diagonal arriba y a la derecha. Pierde quien no tiene movimientos.

c) El mismo juego del virrey, pero se puede pasar el turno.

d) El juego de **brotes** (sprouts). Se dibujan unos puntos en una hoja de papel. En tu turno, eliges dos puntos (que pueden ser el mismo) y los unes con una línea de cualquier forma, siempre que no cruce a una línea ya dibujada, ni pase por otro punto. Luego, añades un punto sobre la línea que has dibujado. Nunca se permite que un punto tenga más de 3 líneas que salen de él. Pierde quien no tiene nada que pueda dibujar. Por ejemplo, esta imagen de Wikipedia.



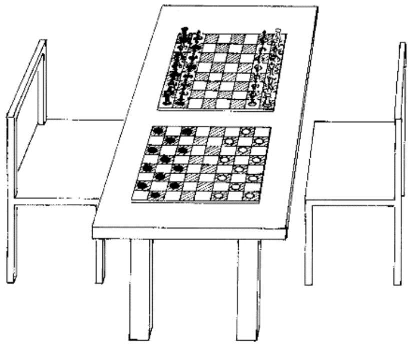
e) El **nim**. Hay varios montones de palitos. En tu turno, tienes que elegir un montón y quitar entre 0 y todos los palitos de ese montón. Pierde quien no tiene palitos que quitar.

f) La primera jugadora escribe un número natural. Después, en cada turno, borras el número escrito y escribes uno estrictamente menor. Pierde quien no puede escribir ningún número natural.

Como siempre, se trata de saber **quién tiene estrategia ganadora**: quien empieza o quien va segunda. ¿Cuántos de los juegos de arriba sabes resolver?

Problema 10. Da un ejemplo de un juego en el que tenga estrategia ganadora la primera jugadora, y otro en el que tenga estrategia ganadora la segunda jugadora.

Definición. Dados dos juegos (o, más bien, dos posiciones dentro de dos juegos), definimos su **suma** como el juego que consiste en pone un juego al lado de otro. En el nuevo juego, en tu turno eliges **uno** de los dos juegos y haces un movimiento en ese juego. Vamos a escribir esta operación como $\oplus$



La suma de dos juegos (Fuente: Winning Ways for your Mathematical Plays, vol. 1,)

Por ejemplo, una partida de nim con dos montones es la suma de dos partidas de nim con un montón cada una. Una partida de brotes puede ser la suma de varias partidas, si hay regiones que están desconectadas.

Problema 11. ¿Quién tiene estrategia ganadora en estos casos? Piensa en ejemplos concretos, por ejemplo, de nim.

a) Si sumas dos juegos en los que la estrategia ganadora la tiene quien va en segundo lugar.

b) Si sumas un juego en el que gana la primera con un juego en el que gana la segunda.

c) (Tiene truco) Si sumas dos juegos en los que gana la primera.

Problema 12. ¿Es la suma de juegos macanuda?

Espero que estés de acuerdo en que la suma de juegos es asociativa y conmutativa.

Problema 13. El nombre de Sun Wukong, el Rey Mono, protagonista de *El Viaje al Oeste*, de Wu Cheng'en, se traduce como "consciente del vacío"[3]. Considera el juego sin movimientos: si es tu turno, pierdes. Convéncete de que es el elemento neutro de la suma de juegos. ¿Quién tiene estrategia ganadora? ¿Es lo mismo que alguna posición de nim? ¿Y de brotes? Convéncete de que el 0 es uno de los mejores inventos de las matemáticas. Contempla el vacío un poco.

En un alarde de pedantería podríamos decir que los juegos forman un monoide conmutativo, pero no lo haremos.

Problema 14. Elige una posición de Nim, vamos a llamarla P. Por desgracia para nosotros, $P \oplus P \neq 0$. ¿Quién tiene estrategia ganadora en $P \oplus P$?

Problema 15 (¡¡¡Importantísimo!!!). Si J es un juego cualquiera (imparcial, finito, etc, es decir, de los que estamos hablando), ¿quién tiene estrategia ganadora en $J \oplus J$?

Problema 16. Mira fijamente tus soluciones de los problemas 11 y 15. ¿Se te ocurre cómo modificar la suma de juegos para que sea macanuda? Si las has mirado muy fijamente y no se te ocurre, sigue leyendo.

Definición. Si a un juego le sumamos otro en el que la segunda jugadora tiene estrategia ganadora, el resultado no cambia.

Vamos a inventarnos una relación entre los juegos en la que los juegos en los que la segunda jugadora tiene estrategia ganadora no importan. La puedes llamar como quieras: decimos que dos juegos J_1 y J_2 son **iguales**, o equivalentes, o igualinchis, o congruentes módulo los juegos que son 0, si en el juego $J_1 \oplus J_2$ tiene estrategia ganadora la **segunda** jugadora.

Problema 17. Voy a llamar $5N$ al juego de nim que es un montón de 5 palitos, y $3N \oplus 4N$ al juego del nim que es un montón de 3 y otro de 4. Demuestra que $1N \oplus 2N = 3N$, $1N \oplus 3N = 2N$, $2N \oplus 3N = 1N$.

Demuestra que $aN = bN$ si y sólo si $a = b$.

[3]La relación que tiene esto con las matemáticas la aprendí en los ejercicios de *Undergraduate Commutative Algebra*, de Miles Reid.

Problema 18. Demuestra que todo juego es igual a sí mismo. Si no ocurriera esto, no merecerían llamarse iguales, ¿no?

Problema 19. Demuestra que si $J_1 = J_2$ y $J_2 = J_3$, entonces $J_1 = J_3$. Si no ocurriera esto, no merecerían llamarse iguales, ¿no?

Problema 20. Demuestra que si $J_1 = J_1'$, entonces $J_1 \oplus J_2 = J_1' \oplus J_2$ para cualquier juego J_2. Concluye que la suma de juegos módulo la relación igualinchis está bien definida.

Problema 21. Demuestra que la suma de juegos (o más bien, de clases de juegos "iguales") es macanuda.

Resolver el nim

¿En la posición $2024N \oplus 2023N \oplus 2022N$, quién gana? Vamos a hacernos expertxs en nim.

Problema 22. Resuelve el nim de un montón, es decir, di en qué partidas de nim con un montón tiene estrategia quien empieza o quien va segunda.

Resuelve el nim de dos montones.

Problema 23. Recuerda que una posición que es 0 es una posición en la que gana la segunda jugadora (es decir, ganadora). Completa las frases con 0 (o ganadora)/no 0 (o perdedora)/siempre/nunca:

> De una posición que es 0 (ganadora) $\boxed{\text{siempre/nunca}}$ hay un movimiento que la transforma en una posición $\boxed{\text{ganadora/perdedora}}$
>
> De una posición que es no 0 (perdedora) $\boxed{\text{siempre/nunca}}$ hay un movimiento que la transforma en una posición $\boxed{\text{ganadora/perdedora}}$

Ejemplo resuelto 3. Encuentra todas las posiciones ganadoras de nim con tres montones que puedas. Recuerda que una posición que es 0 es una posición en la que gana la segunda jugadora (es decir, ganadora).

Intenta dibujar un grafo en el que se pueda ver de qué posición se puede ir a cuál. Para ver que una posición es perdedora, sólo tienes que encontrar un movimiento a una posición ganadora.

Si te rindes o se te acaba el papel, mira el grafo de la siguiente página. Están dibujadas en rectángulos azules algunas posiciones ganadoras. De ellas, están todos los posibles movimientos, y se muestra a qué posición ganadora se puede ir desde ellos. Las que tienen sólo 2 montones están sin dibujar, y las que tienen 2 montones iguales están sin completar (ejercicio).

Problema 24. Resuelve estas partidas de nim, para a cualquier número natural.

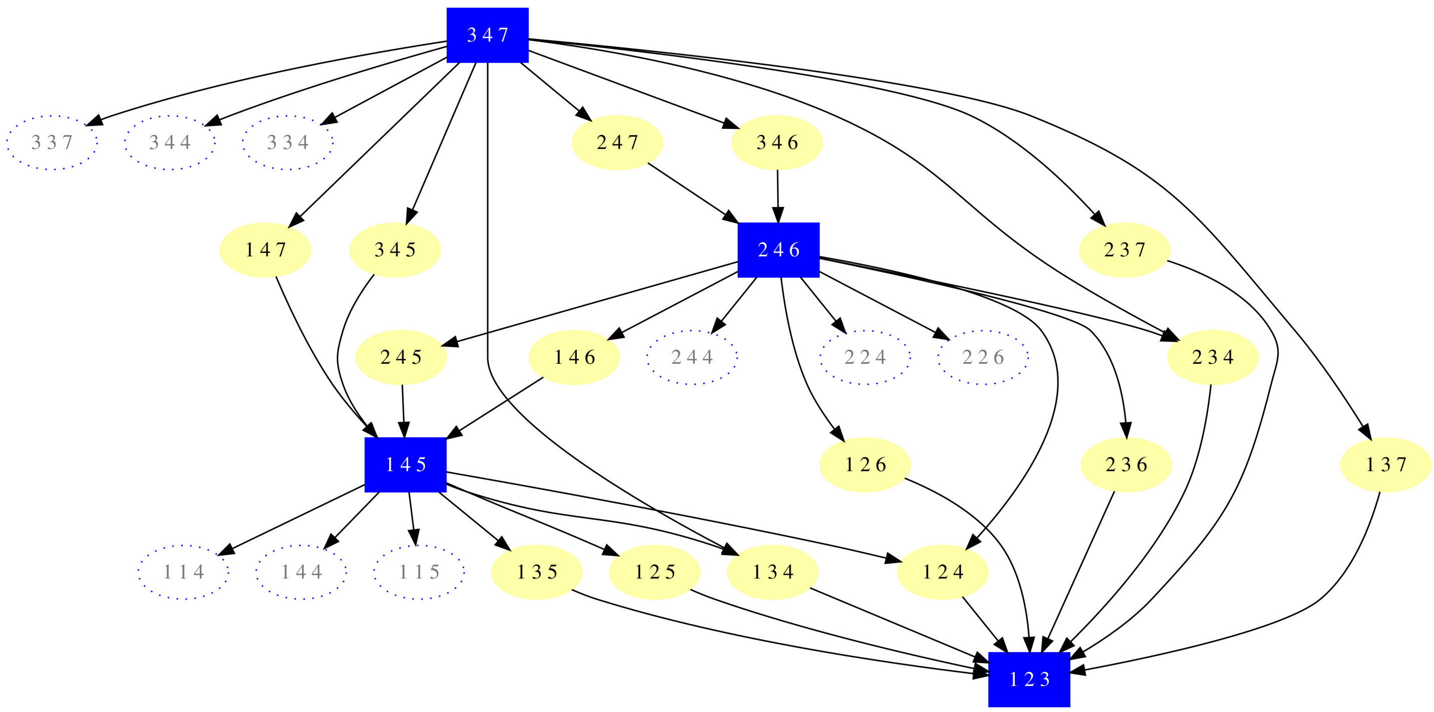
$$1N \oplus aN \oplus (a+1)N$$

Te recomiendo que empieces por $a = 0, 1, 2, \ldots$.

Problema 25. Muestra que $1N \oplus aN$ es equivalente a un juego de nim de un sólo montón y calcula cuál es.

Problema 26. Resuelve estas partidas de nim, para a y b cualquier número natural. Pista: ¿$1 \oplus a$?

$$1N \oplus aN \oplus bN.$$



Posiciones del nim

Problema 27. Calcula (como un solo montón de nim)

$$2N \oplus 0N, 2N \oplus 1N, 2N \oplus 2N, 2N \oplus 3N, 2N \oplus 4N, \ldots$$

Calcula $2N \oplus aN$ para cualquier a.

Problema 28. Calcula $3N \oplus aN$ para cualquier a. Por cierto, ¿cuánto es $1N \oplus 2N$?

Problema 29. Demuestra que, para todo a,

$$aN \oplus 4N = \begin{cases} a+4 & \text{si} \quad a \equiv 0,1,2,3 \pmod 8 \\ a-4 & \text{si} \quad a \equiv 4,5,6,7 \pmod 8 \end{cases}$$

Problema 30. Escribe fórmulas para sumar a cualquier montón $5N$,$6N$ y $7N$

Problema 31. Escribe la tabla de sumar del $0N$ a $7N$.

Problema 32. Escribe la misma tabla de sumar, pero escribe los números en base 2.

Problema 33. Supón que en una posición de nim se pueden hacer movimientos que transformen la posición en $0N, 1N, \ldots, (a-1)N$, pero no en aN, para algún a. Encuentra el valor de esa posición.

Problema 34. Resuelve el nim. Explica quién tiene estrategia ganadora en cualquier posición, y cuál es.

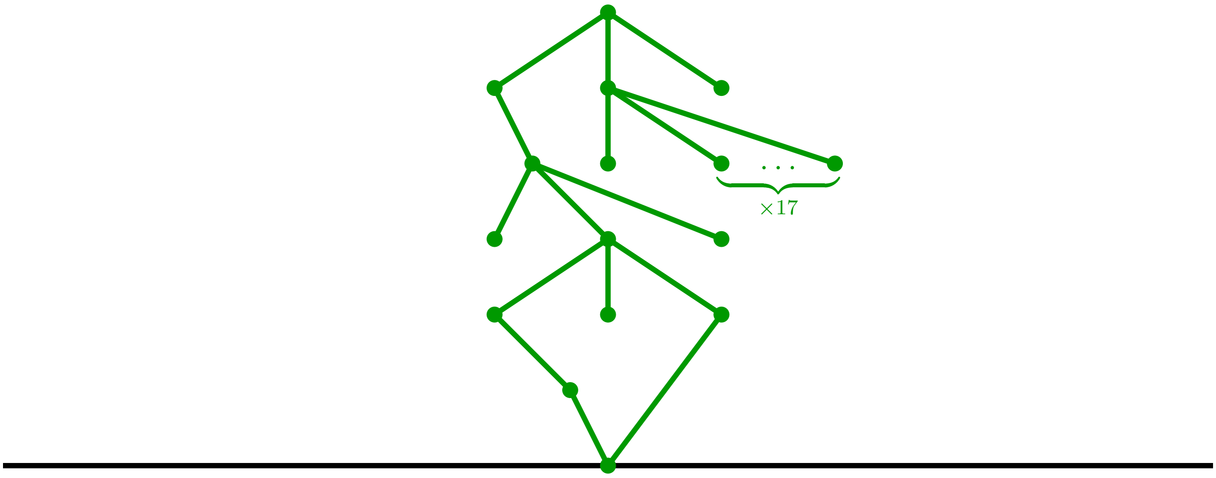
Problema 35. Resuelve el **extreme ultimate nim: the revenge**. Las reglas de extreme ultimate nim: the revenge son las mismas que las del nim, pero además a un montón con 3 palos se le pueden añadir 2 palos en vez de quitar alguno. Sólo se puede hacer esto una vez por montón en cada partida (así que también es finito).

Más juegos

Problema 36. Supón que en una posición de algún juego se pueden hacer movimientos que transformen la posición en un juego equivalente a $0N, 1N, \ldots, (a-1)N$, pero no en aN, para algún a. Encuentra el valor de esa posición. (Recuerda el problema 33)

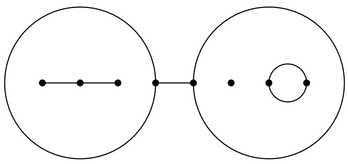
Problema 37. Hay un caballo en la casilla (a, b). En tu turno, puedes mover el caballo a una casilla en la que el valor de $a + b$ disminuya (es decir, $(a - 2, b \pm 1)$ o $(a \pm 1, b - 2)$). Gana quien coloca el caballo en las 4 casillas de la esquina inferior izquierda, es decir, en $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ o $(1, 1)$. Encuentra en qué posiciones del tablero gana la primera jugadora y en cuáles la segunda.

Problema 38. En el juego de **Hackenbush verde**[4] hay un seto, que es un grafo que está conectado al suelo. En tu turno, podas una rama (quitas una arista), y borras toda la parte del grafo que queda desconectada del suelo. Por supuesto, pierde quien no tiene nada que cortar. Encuentra el valor de nim de este árbol (genealógico):



Problema 39. Encuentra a qué montones de nim equivalen los juegos de brotes con 1 o 2 puntos. ¿Te atreves con 3? Yo no. O, si no has leído la parte del nim, decide quién tiene estrategia ganadora.

Problema 40. Explica cómo ganar esta partida de brotes (¿en qué posición hay que jugar?):



[4]No nos atrevemos a jugar a las modalidades azul-roja o, aún peor, azul-roja-verde.