PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023-2024

Fecha: 5, 12 y 19 de abril de 2024 **Grupos Júpiter y Urano**

Juegos

Para esta hoja, recomendamos leerla en orden hasta completar el Problema 7. A partir de allí, se pueden hacer los problemas en el orden que se desee, aunque avisamos de que los problemas más difíciles suelen estar al final de la hoja.

Análisis de posiciones

En esta hoja vamos a analizar algunos juegos matemáticos finitos y discretos.

Definición 1.

- Un juego se llama **finito** si, hagan lo que hagan los jugadores, siempre termina después de un número finito de jugadas.
- Un juego se llama **discreto** si en cada turno los jugadores tienen un número finito de jugadas posibles.

Ejemplo resuelto. El Tres-En-Raya no puede durar más de 9 jugadas porque el tablero solamente tiene 9 casillas, por lo que es un juego finito. Por cierto, no tiene por qué terminar después de 9 jugadas, la partida más corta dura 5 jugadas. Además, es un juego discreto: en la primera jugada el jugador que empieza tiene 9 opciones posibles, y con cada jugada quedan menos.

Problema 1. Considera el siguiente juego: vamos colocando monedas de 1€ encima de un folio de tamaño A4. Está prohibido colocar una moneda encima de otra. El que no puede mover, pierde. ¿Es este un juego finito? ¿Es discreto?

Solución. Claramente, en cada momento cada jugador tiene un número infinito de jugadas posibles, por lo que es un juego no discreto. Por otro lado, el juego no puede durar más que $\frac{\text{Área del folio}}{\text{Área de la moneda}}$ jugadas, por lo que es finito. $\square$

Problema 2. ¿Sabrías decir si es finito y/o discreto el 5 en raya en un tablero de 15×15? ¿Y el 5 en raya en un tablero infinito?

Solución. Si jugamos en un tablero 15×15, el juego es finito (acabará en como mucho $15 \cdot 15 = 225$ jugadas), y discreto: en la primera jugada el jugador que empieza tiene 225 opciones posibles, y con cada jugada quedan menos.

En un tablero infinito el juego no es discreto. Tampoco es finito: Si en el turno número n del primer jugador juega en la posición $(2n, 1)$, y en el turno número n del segundo jugador juega $(2n+1, 1)$, el juego no acaba nunca. $\square$

Problema 3. Describe un juego que sea discreto pero no finito.

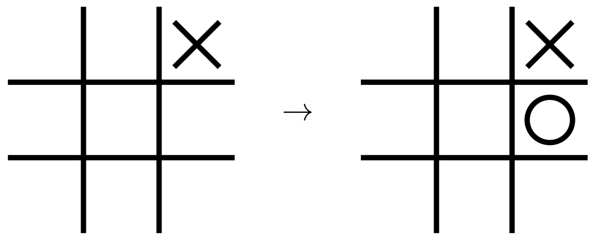
Solución. Dos jugadores se turnan diciendo números naturales. El primero tiene que decir un número entre 1 y 3 (ambos incluidos). Después de eso, cada jugador tiene que decir un número entre el número que ha dicho el jugador anterior y el triple de ese número (ambos incluidos). Pierde el que diga un número par. Este juego es discreto, pero no es finito. $\square$

Se puede demostrar que en un juego discreto y finito hay un número finito de posiciones, por lo que − en teoría − un superordenador sabría calcularlas todas y determinar en cada posición la mejor jugada posible. En la práctica a menudo es imposible, por ejemplo, para el 5 en raya en un tablero de 15×15 existen... ¡más de 10^{100} posiciones!

Definición 2. En un juego de dos jugadores A y B, decimos que el jugador A tiene **estrategia ganadora** si, haga B lo que haga, siempre hay una serie de jugadas que A puede hacer para contrarrestar las jugadas de B y que aseguran que el jugador A acabe ganando.

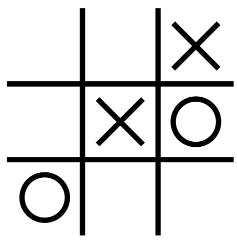
Si el jugador A tiene estrategia ganadora, las jugadas que el jugador A puede hacer para asegurarse que gana suelen depender de las jugadas que haga el jugador B. **Tener una estrategia ganadora no es lo mismo que ganar una partida**: un jugador puede tener estrategia ganadora, pero si no juega de manera óptima la puede perder.

Ejemplo resuelto. Una partida de tres en raya discurre así:



A partir de este punto, el primer jugador tiene estrategia ganadora: Lo primero que puede hacer para asegurarse la victoria es poner una X en la casilla del centro. Ahora, hay dos posibilidades.

- El segundo jugador no pone una O en la casilla de abajo a la izquierda: Entonces, el primer jugador gana en la siguiente jugada.
- El segundo jugador pone una O en la esquina de abajo a la izquierda: Entonces, el tablero queda así



Si el primer jugador pone una X en la esquina de arriba a la izquierda, podrá ganar en su siguiente turno haga lo que haga el segundo jugador.

Problema 4. En la situación del ejemplo anterior, supón que el primer jugador NO hubiera elegido la casilla del centro en su segundo turno. Describe (si es que existe) otro posible movimiento del primer jugador en su segundo turno de manera que, a partir de ese momento,

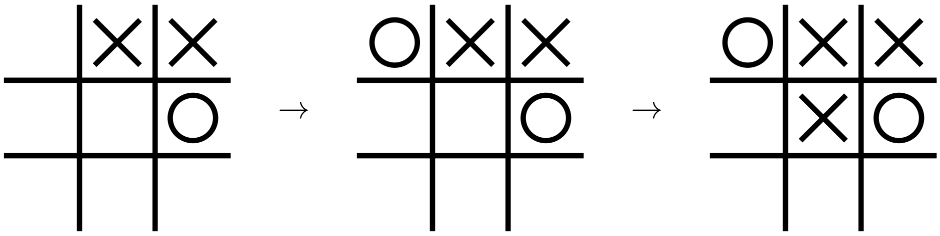
a) mantenga su estrategia ganadora,

b) pierda su estrategia ganadora, pero no pase a tener estrategia ganadora el otro jugador,

c) pase a tener estrategia ganadora el otro jugador.

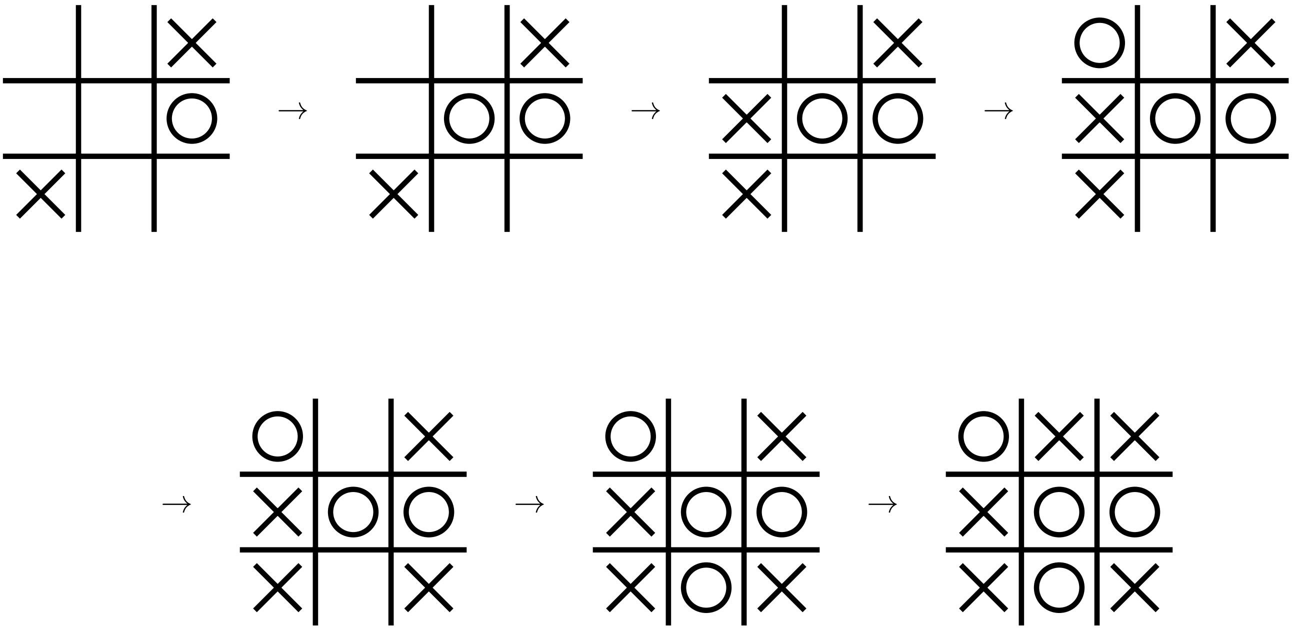
Solución. En a), la primera jugada dibujada está forzada si las O's no quieren perder en la siguiente jugada. En b) cada jugada representada por una flecha está forzada si no se quiere perder en la siguiente jugada.

a)



y a partir de aquí el primer jugador gana en su siguiente turno, haga lo que haga el segundo. También mantiene la estrategia ganadora si coloca su segunda X's en la esquina superior izquierda, o en la casilla central del lado de arriba.

b)



Los dos han jugado de manera óptima a partir de la segunda jugada del primer jugador, y han acabado en tablas. Esta situación también ocurre si el primer jugador coloca su segunda X's en la esquina inferior derecha, en la casilla central del lado de abajo, o en la casilla central del lado de la izquierda.

c) Este movimiento no existe. Hay muchos casos por analizar, así que pueden repartírselos entre los miembros del grupo para ir más rápido.

$\square$

Definición 3. En un juego de dos jugadores que juegan por turnos, la posición se llama

- **ganadora** si al llegar tú a esta posición tras tu turno, tienes estrategia ganadora a partir de ese momento, y
- **perdedora** si al llegar tú a esta posición tras tu turno, tu adversario tiene estrategia ganadora a partir de ese momento.

Si has hecho bien la parte b) del Problema 4, sabes que hay posiciones que no son ganadoras ni perdedoras, ya que también hay posiciones en las que, si ambos jugadores juegan de manera óptima, se acaba en empate. Pero para los juegos finitos y discretos que, por sus reglas, no pueden acabar en empate, toda posición es o ganadora o perdedora.

Teorema 1. *No hay ninguna jugada que pase de una posición ganadora a otra ganadora.*

Demostración. La demostración de este teorema es muy sencillo. Si hubiera una jugada así, ¡ambos jugadores deberían ganar, lo que es imposible! □

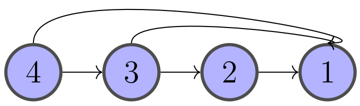
Es importante darse cuenta de lo siguiente:

- De una posición ganadora solamente podemos llegar a una perdedora.
- No obstante, de una perdedora se puede llegar tanto a otra perdedora como a una ganadora.

Asegúrate de que entiendes por qué es esto antes de continuar con la hoja.

Problema 5. Dos jugadores por turnos retiran $1, 2$ o 3 cerillas de un montón de 16 cerillas. El que termina retirando la(s) última(s) cerillas gana. ¿Quién gana, el que comienza o el segundo? Busca las posiciones ganadoras para este juego.

Solución. Las posiciones 1, 2 o 3 son claramente perdedoras: si dejamos a nuestro adversario con esta cantidad de cerillas, nos gana en una jugada. Sin embargo, dejarle con 4 es ganar, porque sea cual sea la cantidad de cerillas que retire, podrá desplazarse solamente a una posición perdedora.



Ahora es fácil ver que en el juego de las cerillas gana el segundo. Aquí las posiciones ganadoras son múltiplos de 4. El segundo jugador completa la cantidad de cerillas que haya cogido el primero hasta 4 (siempre puede hacerlo). Como la posición inicial es múltiplo de 4, siempre podrá ir a otro múltiplo de 4. Después de 4 turnos habrá llegado al 0. El primer jugador, por el contrario, partiendo de un múltiplo de 4 nunca puede llegar a un múltiplo de 4. □

Uno de los procedimientos habituales en el análisis de juegos es la "marcha atrás", que consiste en empezar el análisis desde el final hacia el principio. Si, por las reglas de ese juego, hay una posición final y quien llega a esa posición gana, buscaremos primero todas las posiciones desde las que podemos llegar a la posición final en un movimiento. Esas posiciones serán todas perdedoras. En el Problema 5, estas posiciones perdedoras inmediatamente anteriores a la posición final son dejar 1, 2 o 3 cerillas en la mesa. Ahora bien, las posiciones desde la que se llega sóla y exclusivamente a estas perdedoras serán ganadoras. En el Problema 5, sólo hay una posición ganadora inmediatamente anterior a las posiciones 1, 2 y 3, que es la posición en la que dejamos 4 cerillas en la mesa a nuestro contrincante.

La simetría

Crear una posición simétrica puede ser una estrategia ganadora para juegos en los que pierde el que ya no puede jugar. Esto funciona si ocurren estas dos cosas:

- a nuestro rival con cada jugada no lo queda más remedio que romper la simetría, y
- nosotros siempre la podemos restituir copiando su jugada simétricamente.

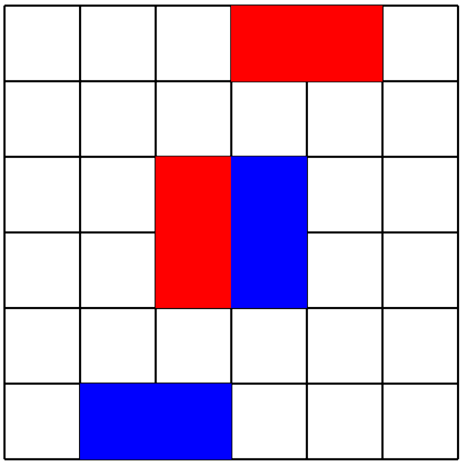
Recuerda que hay distintos tipos de simetría: a veces podemos usar la simetría axial (respecto a una recta), otras nos resultará más útil la simetría rotacional de 180°.

Vamos a analizar el siguiente juego usando simetría.

Problema 6. En un tablero de 6×6 dos jugadores colocan por turnos un dominó (una ficha 2×1 que cubre dos casillas). El que no puede mover pierde. ¿Quién gana y cuál es su estrategia?

Solución. La simetría respecto a un eje no es muy buena estrategia porque el primer jugador puede romperla colocando su ficha encima de cualquier eje.

Usemos la simetría rotacional de 180° como se puede ver en el dibujo, a cualquier jugada de los rojos los azules contestan con una jugada simétrica. Si los rojos han podido mover, el espacio simétrico estará vacío:



□

La paridad

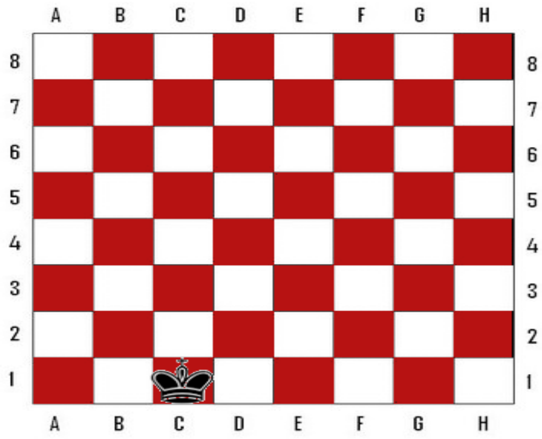
La paridad no solamente es un importante concepto matemático, sino que puede usarse como estrategia en muchos juegos matemáticos. **En el siguiente problema busca una cantidad de cuya paridad dependa el éxito del juego.**

Problema 7. Los jugadores tienen delante dos montones de piedras, uno con 30 y el otro con 31 piedras. Cada jugada consiste en descartar uno de los dos montes de piedras y dividir el otro en dos montones no necesariamente iguales (pero de manera que cada montón tenga al menos una piedra). Pierde el jugador que no puede mover, lo que ocurre si tiene dos montones de 1 piedra delante. Indica un movimiento ganador y una estrategia para el primer jugador.

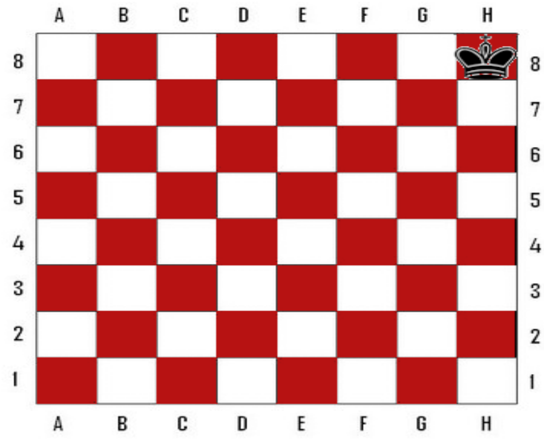
Pista. Piensa en números pares e impares. ¿Qué tienen que ver con este problema?

Solución. Las posiciones ganadoras en este juego son parejas de números impares, igual que la posición final $(1, 1)$. Tenemos que demostrar que de una ganadora sólamente se llega a una perdedora y que de cualquier perdedora (que no sea dos impares) se puede llegar a una ganadora. Ambas afirmaciones son fáciles de demostrar: si dividimos un número impar en suma de dos, nunca será suma de dos impares. Por otro lado, en cualquier posición perdedora hay al menos un número par, y este número siempre se puede dividir en suma de dos impares. □

Problema 8. En un tablero de ajedrez se coloca el Rey en la casilla $c1$. Los jugadores lo mueven por turnos una casilla hacia arriba, a la derecha o en diagonal arriba-derecha. Cualquier otra dirección está prohibida. Gana el que consigue colocarlo en la casilla $h8$.



(a) Posición inicial

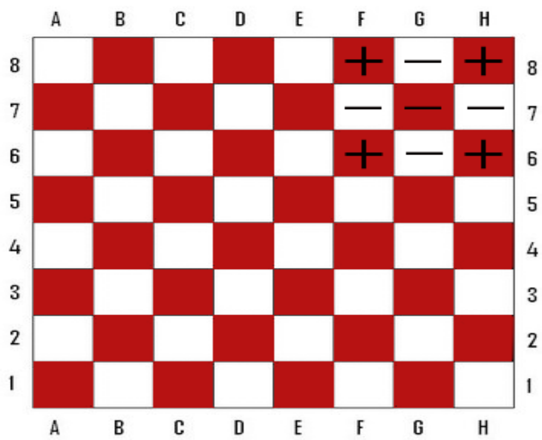


(b) Posición final

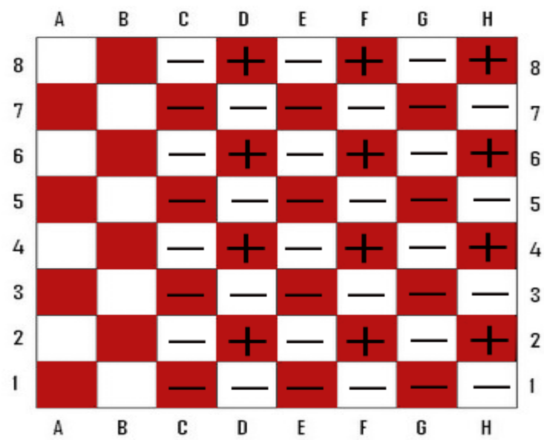
¿Quién gana, el primero o el segundo? Describe la estrategia ganadora. ¿Cuál es la jugada ganadora?

Solución. Marquemos la casilla final, que es ganadora, con el símbolo "+". Las posiciones desde las que se llega a la ganadora, son perdedoras, por lo que marcaremos $g7, g8, h7$ con un "-".

Desde $f8$ solamente se puede llegar a la $g8$, que es perdedora, por tanto la casilla $f8$ es ganadora y la marcamos con un más. Lo mismo ocurre con la $h6$. Sin embargo, desde $f7$ podemos llegar a la ganadora $f8$, por lo que es perdedora y la marcaremos con un menos, igual que la $g6$. Por el contrario, desde la $f6$ solamente podemos acceder a las casillas marcadas con un menos, lo que demuestra que es ganadora (Figura 1).



(a) Figura 1



(b) Figura 2

Siguiendo de esta manera observamos que se ha formado un patrón: todo el tablero se ha dividido en bloques de 2×2, como podemos observar en la Figura 2.

Conclusión: el primero para ganar debe mover el Rey a la casilla $d2$ y luego moverlo siempre a una casilla marcada con un "+".

□

Problema 9. Llamemos "Vasallo" a una nueva pieza de ajedrez que puede avanzar 2 casillas en horizontal, vertical o diagonal hacia arriba o hacia la derecha. Empezando en $c1$, y repitiendo el juego del problema anterior pero con el vasallo en vez de con el rey, ¿quién gana, el primero o el segundo?

Solución. Las posiciones ganadoras en este juego están representadas en la siguiente figura: Como es fácil de observar, la casilla $c1$ está también marcada con un "+", por lo que es una posición ganadora y el primer jugador no tiene buenas jugadas. Haga la jugada que haga el segundo puede mover el vasallo a una casilla marcada con "+" y terminará ganando.

□

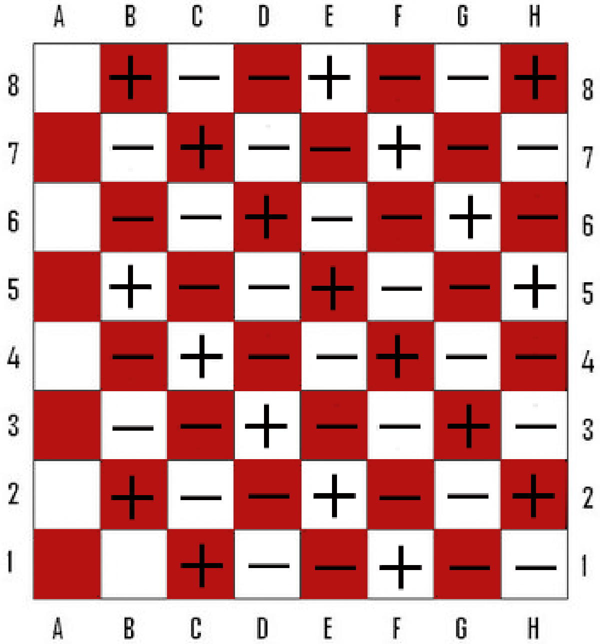


Figure 3: Posiciones ganadoras

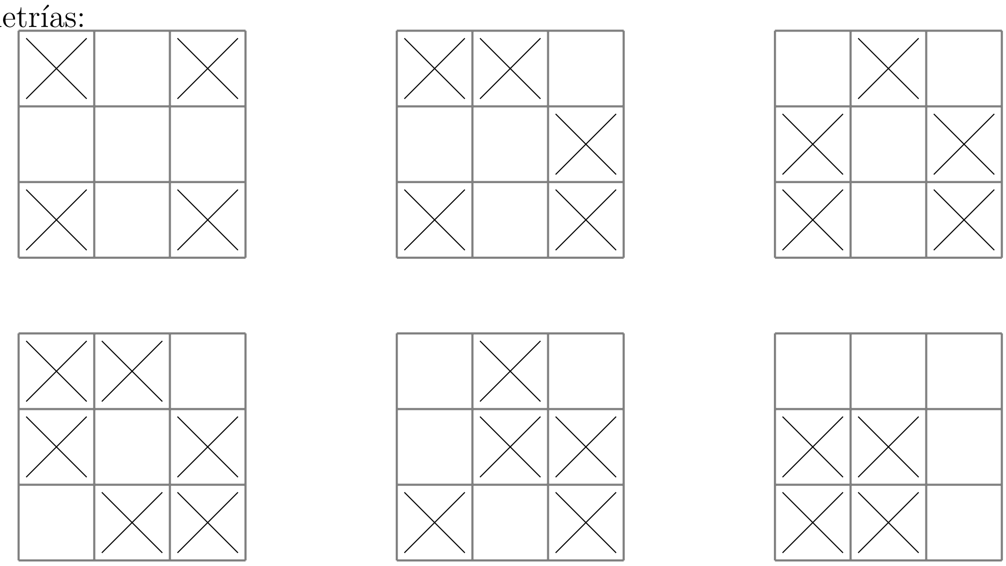
Problema 10. Tenemos 2 filas de piedras, en una fila hay 5 piedras, en la otra, 7. Cada jugada consiste en quitar la cantidad de piedras que quieras de una fila. El jugador que retira la(s) última(s) piedra(s) gana. ¿Quién gana, el primero o el segundo? Describe la estrategia ganadora. ¿Cuál es la jugada ganadora?

Solución. En este juego gana el primero igualando las dos filas de piedras $(5-5)$. El segundo, sea cual sea su jugada, romperá esta simetría, ya que no puede retirar piedras de ambas filas. El primero con su jugada restablece la simetría hasta llegar a la posición final $0-0$, que es simétrica también. Las posiciones ganadoras en este juego son $k-k$.

□

Problema 11. Busca todas las posiciones ganadoras finales en el juego de Tres-en-raya-con-cruces, en el que ambos jugadores usan las cruces y **pierde** el que forma un tres en raya. Por posición ganadora final nos referimos a una posición ganadora en la que el siguiente jugador perderá en su siguiente turno haga lo que haga.

Solución. Las posiciones ganadoras finales (a las que ya no se puede añadir ninguna cruz) son seis, salvo simetrías:



□

Problema 12. ¿Quién gana en el juego de Tres en raya sólo con cruces explicado en el problema anterior?

Solución. Gana el primero si ocupa la casilla central. Si el segundo juega lado, el primero juega una esquina opuesta, y viceversa. Quedan dos jugadas, una esquina vecina y un lado vecino, por lo que el primero consigue victoria.

Cualquier otra jugada del primero pierde ya que el segundo contesta simétricamente con respecto al punto central y bloquea la casilla central. A partir de entonces jugando simétricamente consigue la victoria.

□

Problema 13. Dos jugadores mueven por turnos la Reina en un tablero de ajedrez empezando en la casilla $c1$. La Reina se mueve cualquier cantidad de casillas hacia la derecha, hacia arriba o en diagonal derecha-arriba. Busca las posiciones ganadoras si gana el que consigue colocarla en la casilla $h8$.

Solución. Las únicas posiciones ganadoras en este juego (aparte de $h8$, claro) son $f7, g6, d1, c5, e3$.

□

Problema 14. Dos jugadores, Andrés y Beltrán, juegan al siguiente juego. Por turnos van escribiendo en la pizarra números enteros con la condición de que no puede haber dos números cuya resta sea múltiplo de 5 (por ejemplo, si en la pizarra está el número 37, no podemos escribir ni 32, ni 42, ni 7 ni 87...). Si empieza Andrés, ¿quién gana jugando bien?

Solución. Solamente hay 5 restos posibles módulo 5. El que escriba el 6º número pierde. Gana Andrés.

□

Problema 15. Omar tiene cinco tarjetas, todas tienen una cara blanca y otra negra. Empieza con las cinco tarjetas en la mesa de manera que la cara visible de todas ellas es la blanca. En cada turno puede darle la vuelta a k tarjetas a la vez. Omar quiere acabar con las cinco tarjetas en la mesa de manera que la cara visible de todas ellas es la negra.

a) ¿Puede conseguir su objetivo si $k = 3$ en todos los turnos?

b) ¿Y si $k = 2$ en todos los turnos?

Para cada apartado, encuentra una manera en la que Omar logra su objetivo o demuestra que es imposible.

Solución. a) Puede seguir la secuencia $BBBBB \to NNNBB \to NBBNB \to NNNNN$.

b) Es imposible. En todos los turnos, el número de tarjetas blancas es impar, porque empieza siendo impar y en cada turno puede crecer en 2 (si se da la vuelta a dos negras), decrecer en 2 (si se da la vuelta a dos blancas), o mantenerse igual (si se da la vuelta a una blanca y otra negra). Por tanto, en todos los turnos habrá un número impar de tarjetas blancas, y nunca podrán ser todas negras.

□

Problema 16. Dos personas colocan caballos por turnos en las casillas de un tablero de ajedrez de manera que los caballos no se capturen entre sí. Pierde aquel que no puede realizar un movimiento. Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbela.

Solución. Gana el segundo. Puede utilizar tanto la simetría con respecto del punto central, como con respecto de cualquier eje que corta el tablero en dos tableros 4 por 8.

□

Problema 17. Dos piratas, Bill y John, tienen cada uno 74 monedas de oro. Deciden jugar un juego en el que, por turnos, colocarán monedas en la mesa, con la regla de que en un solo turno pueden colocar una, dos o tres monedas a la vez. El ganador será quien coloque la centésima moneda en la mesa. Bill comienza. Si un jugador se queda sin monedas antes que haya 100 monedas en la mesa, pierde. ¿Quién puede ganar en este juego, independientemente de cómo actúe su oponente? (¡Ojo! sólo tienen 74 monedas)

Solución. Si los piratas tuvieran una cantidad ilimitada de monedas, la estrategia ganadora de John sería simple: en cualquier turno de Bill, John solo tendría que agregar la cantidad de monedas que Bill haya colocado hasta llegar a cuatro monedas en total. En este caso, el número de monedas después de cada movimiento de John sería un múltiplo de cuatro, y como 100 es divisible por 4, John podría colocar la centésima moneda en su vigésimo quinto turno.

Sin embargo, dado que los piratas tienen solo 74 monedas cada uno, si Bill coloca una moneda en cada turno, John tendría que colocar tres monedas en cada turno para seguir la estrategia anterior, y en su vigésimo quinto turno, John se quedará sin monedas. Por lo tanto, para mantener esta estrategia ganadora, John debe colocar una o dos monedas en algún momento. Demostraremos que esto es posible.

Si en su primer turno Bill coloca dos o tres monedas, entonces John ahorrará monedas en el primer turno y ganará. Supongamos que Bill coloca una moneda en su primer turno. Luego, John coloca una moneda en respuesta. Luego, hay tres posibilidades para el segundo movimiento de Bill:

Bill coloca una moneda. En este caso, John coloca una moneda también. Ahora hay cuatro monedas en la mesa, y John puede aplicar la estrategia descrita anteriormente, lo que le permitirá ganar.

Bill coloca tres monedas. John también coloca tres monedas. Ahora hay 8 monedas en la mesa, y John ya ha colocado menos de tres monedas una vez, por lo que puede aplicar la estrategia descrita anteriormente y ganar.

Bill coloca dos monedas. En este caso, habrá cuatro monedas en la mesa. John coloca una moneda. Bill no debe permitir que el número de monedas sea divisible por 4 después del movimiento de John, por lo que debe colocar tres monedas. En los siguientes movimientos, John colocará una moneda en cada turno, obligando a Bill a colocar tres. Sin embargo, Bill no podrá colocar la centésima moneda, ya que necesitaría 75 monedas para hacerlo. Entonces gana John.

□

Problema 18. Seis matemáticas se colocan formando un corro. Se les pone a cada uno de ellas un gorro que está pintado de manera aleatoria de rojo o de azul. Ninguna de las matemáticas puede ver el color de su gorro, pero sí puede ver el color del gorro de las otras cinco matemáticas. Si las matemáticas pueden elegir una estrategia conjuntamente de antemano, describe una estrategia que pueden seguir para maximizar la probabilidad de que todas ellas adivinen correctamente el color de su gorro en silencio, y calcula esa probabilidad.

Por ejemplo, si siguieran la estrategia de adivinar aleatoriamente, tendrían una probabilidad de $\frac{1}{2^6}$ de acertar todas. Sin embargo, si siguieran la estrategia de decir el mismo color del gorro de la matemática que está dos puestos a la derecha, acertarían si todas tuvieran el gorro rojo, todas azules, o los gorros fueran alternando entre azul y rojo en el círculo, es decir, acertarían en 4 ocasiones de 2^6 posibles. Por tanto, la probabilidad de acertar todas con esta estrategia es $\frac{4}{2^6} = \frac{1}{16}$, y esto es mejor que adivinar aleatoriamente.

Solución. Empezamos viendo que la probabilidad buscada no puede ser mayor que $\frac{1}{2}$. Una persona concreta puede tener un gorro de color rojo o azul. Si el resto de personas tiene una configuración de colores en los gorros concreta, la estrategia le hará adivinar azul o rojo, pero sólo adivinará en la mitad de ocasiones. Por tanto la probabilidad de que todas las matemáticas acierten no puede ser mayor que esto.

Veamos que la probabilidad $\frac{1}{2}$ se puede alcanzar. Identificamos el color azul con el número 1 y el color rojo con el número 0. Cada matemática dirá que lleva un gorro azul si la suma de los números correspondientes a los gorros del resto de matemáticas es impar, y dirá que lleva un gorro rojo si esa suma es par. Todas las matemáticas acertarán si y sólo si la suma de los números correspondientes a los gorros de las seis matemáticas es par, y eso ocurre en la mitad de ocasiones.

□

Problema 19. Azucena y Bárbara son rivales jugando al siguiente juego: se colocan junto a otras 2023 personas formando un círculo, pero no sabemos cuántas personas tienen entre ellas dos. Las dos se turnan haciendo jugadas, y en cada jugada la jugadora a la que le toca jugar quita del círculo a uno de sus dos vecinos (el que quiera). Gana la primera jugadora que quita a su rival del círculo. Empieza jugando Azucena. ¿Podemos determinar qué jugadora tiene estrategia ganadora, es decir, qué jugadora puede ganar haga lo que haga la otra?

Solución. Azucena tiene estrategia ganadora. Como 2023 es impar, empieza habiendo un número par de jugadores entre ellas por un lado e impar por el otro. Si el número par es 0, Azucena puede quitar a Bárbara del círculo. Si el número par es > 0, puede quitar a su vecino de ese lado, de forma que queden un número impar de jugadores entre ellas en ambos lados. Haga lo que haga Bárbara, dejará a Azucena en la situación en la que hay un número par de jugadores entre ellas por un lado e impar por el otro. Si Azucena sigue esta estrategia, tras como mucho 2022 jugadas el número par será 0 y ganará.

□

Problema 20. Ainara y Blanca están jugando a "Tres En Raya Mal", en el que inicialmente hay una X en un papel, y las jugadoras se turnan escribiendo una X o una O (a su elección) al final de la palabra escrita en el papel, creando una secuencia de X's y O's. Ainara es la primera en jugar. Pierde la jugadora que primero consigue una subsecuencia de tres X's o tres O's equiespaciadas en la palabra. Por ejemplo, si en el papel está escrita la palabra $XOXXOX$, es el turno de Blanca y esta tendrá que elegir escribir una O, ya que si escribiera X perdería, porque las letras subrayadas en $\underline{X}OX\underline{X}OX\underline{X}$ son una subsecuencia de X's que están equiespaciadas (entre dos consecutivas hay el mismo número de letras, en este caso dos). Sin embargo, si Blanca elige la O se asegura que gana, porque tanto $XOX\underline{X}O\underline{X}O\underline{X}$ como $X\underline{O}XX\underline{O}XO\underline{O}$ son posiciones perdedoras.

Suponiendo que ambas juegan de manera optima después de la primera jugada de Ainara,

a) ¿quién ganará si Ainara empieza colocando una X al lado de la X inicial?,

b) ¿quién ganará si Ainara empieza colocando una O al lado de la X inicial?

Solución. a) Ainara puede ganar repitiendo lo que haga Blanca en el turno anterior. Blanca en su primer turno tiene que colocar una O, o pierde. Ainara colocará otra O. Luego Blanca tendrá que colocar una X (o pierde), y Ainara colocará una X, Blanca tendrá que colocar una O (o pierde), Ainara colocará una O, y Blanca habrá perdido añada lo que añada a $XXOOXXOO$.

b) También ganará Ainara.

- Caso 1: La secuencia empieza por XOX. En este caso, Ainara puede repetir lo que hace Blanca en el turno anterior. Si Blanca juega optimamente, esto se traduce en la secuencia $XOXXOO$, y Blanca pierde en el siguiente turno.
- Caso 2: La secuencia empieza por XOO. En el siguiente turno, Ainara tiene que escribir una X. Hacemos dos casos.
  - Caso 2.1: La secuencia empieza por $XOOXX$. En este caso, Ainara tiene que escribir una O, y Blanca en su siguiente turno también, por lo que Ainara escribirá una X. A Blanca le llega la secuencia $XOOXXOOX$, y haga lo que haga habrá perdido ($XO\underline{O}XX\underline{O}OX\underline{O}$, $\underline{X}OOX\underline{X}OOX\underline{X}$).
  - Caso 2.1: La secuencia empieza por $XOOXO$. En este caso Ainara puede jugar una O, y Blanca pierde en el siguiente turno ($\underline{X}OO\underline{X}OO\underline{X}$, $XOOX\underline{OOO}$)

□

Problema 21. Ari y Braulio juegan a un juego en el que empiezan con una fila de 20 cuadrados, y se turnan tachando uno de los cuadrados. El juego acaba cuando quedan dos cuadrados sin tachar. Ari gana si los cuadrados que quedan tienen un lado en común, y Braulio gana en caso contrario.

a) Si Ari es la que empieza jugando (la que tacha el primer cuadrado), ¿quién de los dos tiene estrategia ganadora?

b) Y si es Braulio el que empieza jugando, ¿quién tiene estrategia ganadora?

Solución. a) Braulio tiene estrategia ganadora. Si Ari empieza jugando, el último en jugar será Braulio, y en su ultimo turno, tendrá 3 cuadrados sin tachar. Si van seguidos unos de otros, tacha el de en medio y gana. Si dos van seguidos y otro no, tacha uno de los que van seguidos y gana. Si ninguno de esos tres cuadrados tiene un lado en común, Braulio ganará haga lo que haga.

b) Ari tiene estrategia ganadora. Numeramos los 20 cuadrados de izquierda a derecha de la siguiente manera: $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, 10, 10$. La estrategia ganadora de Ari es la siguiente: si Braulio tacha un cuadrado numerado con el número k, Ari tachará el otro cuadrado numerado con k. La estrategia garantiza que los dos cuadrados que quedan sin tachar tras el último turno están numerados con el mismo número, por lo que tienen un lado en común.

□

Problema 22. Amelia y Bibiana se turnan eligiendo un número entero no negativo, y en cada turno el número que eligen tiene que ser el resultado de cambiar un dígito del número que acaba de escoger su compañera. Pierde la primera persona en elegir un número que ya ha sido elegido. Si Amelia es la primera en jugar, y las dos juegan de manera óptima, ¿quién gana?

Observación: No hay ceros por delante de un número, salvo en el número 0. Por ejemplo, si una persona elige el 2020, la otra podría responder eligiendo el $0020 = 20$ (cambiando el primer 2 por un 0), y a partir de entonces se jugaría con un número de dos o menos cifras.

Solución. Gana Bibiana. Puede seguir la siguiente estrategia ganadora. Cada vez que Bibiana elige un número par, Amelia le suma uno, y si Bibiana elige un número impar, le resta uno. Bibiana sólo puede repetir número siguiendo esta estrategia si Amelia ya ha repetido previamente, es decir, si Amelia ha perdido. Así, Bibiana se asegura que no pierde. Además, si Amelia empieza eligiendo un número de n cifras, el juego acaba necesariamente en $10^n + 1$ turnos (porque hay 10^n números enteros no negativos de n cifras o menos), por lo que alguien tiene que perder, y si Bibiana sigue la estrategia descrita, la que pierde será Amelia.

□

Problema 23. Aitor y Begoña juegan a un juego en una cuadrícula infinita. Se turnan coloreando segmentos, Aitor en rojo y Begoña en azul. Los segmentos que colorean tienen que ser un lado de uno de los cuadraditos más pequeños que forman la cuadrícula, y no se pueden colorear segmentos que ya hayan sido coloreados previamente. Aitor gana si consigue crear un camino cerrado en color rojo, Begoña gana si puede evitar indefinidamente que Aitor gane. Empieza jugando Aitor. ¿Puede Aitor tener una estrategia ganadora?

Solución. No, Begoña puede evitar indefinidamente que Aitor gane de la siguiente manera: Si Aitor colorea un segmento horizontal, Begoña colorea el lado izquierdo del cuadradito que tiene como lado de abajo el segmento que acaba de colorear Aitor. Si Aitor colorea un segmento vertical, Begoña colorea el lado de abajo del cuadradito que tiene como lado izquierdo el lado que acaba de colorear Aitor. Siguiendo esta estrategia, Begoña se asegura que siempre está coloreando segmentos que aún no están coloreados. Además, Aitor nunca podrá hacer un camino cerrado, porque tendría que tener una esquina en forma de L coloreada, y todas esas están coloreadas con un lado rojo y otro azul.

□

Problema 24. Pablo está situado en el centro de un prado circular de radio igual a 100 metros. Cada minuto da un paso de longitud de 1 metro. Antes de cada paso, anuncia la dirección en la que quiere avanzar. Sofia puede hacer que cambie su dirección a la opuesta. ¿Puede Pablo actuar de tal manera que inevitablemente salga del prado en algún momento, o Sofia siempre puede impedírselo?

Solución. Después del n-ésimo paso, Pablo puede estar a una distancia exacta de n metros del centro. Para lograrlo, simplemente necesita elegir en cada ocasión la dirección perpendicular al segmento que conecta el punto donde está parado con el centro del prado. □

Problema 25. Se tienen 2024 tarjetas con un 1 dibujado y 2024 tarjetas con un 2. Lucía organiza estas tarjetas para formar un número de 4048 dígitos. En un solo movimiento, Darío puede intercambiar dos tarjetas y pagar 1 euro a Lucía. El proceso termina cuando Darío obtiene un número divisible por 11. ¿Cuál es la suma máxima que Lucía puede ganar si Darío intenta pagar lo menos posible y juega la estrategia óptima?

Solución. Consideremos un número A de 4048 dígitos, compuesto por 2024 unos y 2024 doses. Supongamos que en las posiciones impares hay k unos y $l = 2024 - k$ doses, entonces en las posiciones pares habrá k doses y l unos (donde k puede tomar cualquier valor entero de 0 a 2024). La diferencia entre las sumas de los dígitos en las posiciones impares y las posiciones pares es $(k + 2l) - (2k + l) = l - k = 2024 - 2k$. Dado que 2024 es divisible por 11, entonces A es divisible por 11 si y solo si k es divisible por 11.

En un solo movimiento, k puede cambiar en no más de 1. Por lo tanto, si Lucía inicialmente forma el número A con $k = 5$ (lo cual es claramente posible), Darío necesitará al menos 5 movimientos para obtener un número con k divisible por 11.

Mostraremos que cinco movimientos siempre son suficientes para Darío. Cambiando un uno en una posición impar con un dos en una posición par, puede disminuir k en 1 en un solo movimiento, siempre y cuando $k \neq 0$. De manera análoga, intercambiando un dos en una posición impar con un uno en una posición par, puede aumentar k en 1 en un solo movimiento, siempre y cuando $k \neq 2024$. Supongamos que el número inicial de Lucía deja un resto r al dividir por 11. Si $r = 0$, el número inicial ya es divisible por 11 y no se necesita hacer nada. Si $1 \leq r \leq 5$, Darío puede realizar r operaciones para disminuir k en r al número más cercano divisible por 11. Si $6 \leq r \leq 10$, en $11 - r \leq 5$ operaciones, Darío puede aumentar k en $11 - r$ al número más cercano divisible por 11 (esto es posible porque el valor máximo posible de $k = 2024$ es divisible por 11).

□

Problema 26. Álvaro escribe un número entero positivo en cada cuadrado de un tablero 1000×1000. Cada segundo que pasa, Berta elige una casilla con valor al menos 5 (si es que existe), le resta 4 al valor de ese cuadrado, y suma 1 al valor de las casillas adyacentes (los que comparten una arista con la casilla elegida). Si no existe una casilla con valor al menos cinco, decimos que el proceso ha acabado.

a) Sea S la suma de todos los valores de las 1000^2 casillas del tablero. Demuestra que S solamente puede mantenerse o decrecer en cada segundo que pasa.

b) Si una configuración de valores en el tablero apareciera dos veces, demuestra que los elementos de la fila superior no cambiarían desde la primera vez que aparece la configuración hasta la segunda vez que aparece.

c) Usando la parte anterior demuestra que, haga lo que haga Berta, y haya escrito Álvaro los números que haya escrito al principio, nunca puede aparecer una configuración de valores en el tablero que ya haya aparecido previamente.

d) Usando la parte anterior concluye que haga lo que haga Berta, y haya escrito Álvaro los números que haya escrito al principio, el proceso siempre acabará.

Solución. a) En cada segundo la suma se mantiene si Berta no elige un cuadrado del borde o de las esquinas, decrece en 1 si elige un cuadrado del borde que no es una esquina, y decrece en 2 si elige una de las 4 esquinas.

b) Como la suma decrece si Berta elige un cuadrado de la fila superior, y la suma no puede volver a crecer por la parte a), Berta no ha podido elegir ningún cuadrado de la fila superior, y sólo podrán haber cambiado su valor si ha elegido un cuadrado de la segunda fila. En ese caso, el valor de un elemento de la primera fila se habría incrementado por 1, y la única manera de que este valor decreciera y volviera a su valor original sería si Berta eligiera esa casilla, que ya hemos visto que no puede hacer. Por tanto, hemos demostrado que si una configuración de valores en el tablero apareciera dos veces, los elementos de la fila superior no cambiarían desde la primera vez que aparece la configuración hasta la segunta vez que aparece.

c) Por la parte b) sabemos que si una configuración apareciera dos veces en un tablero 1000×1000, entonces tendríamos una configuración que podría aparecer dos veces en un tablero 999×1000 (ya que hemos visto que la primera fila no importa). Reiterando este proceso, tendríamos una configuración que podría aparecer dos veces en un tablero 1×1000, y esto es imposible, porque las operaciones que puede hacer Berta decrecen la suma total.

d) Para cada S, hay un número finito de tableros con valores cuya suma total es S. Por la parte c), ninguno de estos se puede repetir, así que haga lo que haga Berta, la suma total tendrá que ir decreciendo. No puede decrecer infinitamente, porque el proceso acaba si todas las casillas tienen valores entre 1 y 4. Por tanto, el proceso acaba.

□

Problema 27. Alisa y Juan juegan el siguiente juego. Hay un montón de 100 piedras sobre la mesa. Los chicos se turnan para hacer movimientos y Alisas empieza. Al realizar un movimiento, el jugador divide cada pila que contiene más de una piedra en dos pilas más pequeñas. Gana aquel que, pasado su turno, deja montones de una piedra en cada pila. Encuentra una estrategia ganadora para alguno de los ganadores.

Solución. Basta con observar la pila más grande. Supongamos que hay $2^n - 1$ piedras en la pila más grande antes del movimiento del jugador A. Después de su movimiento, la pila más grande contiene de 2^{n-1} a $2^n - 2$ piedras. Por lo tanto, el jugador B siempre puede asegurarse de que la pila más grande contenga $2^{n-1} - 1$ piedras después de su jugada. En este caso, gana el jugador B.

Entonces, si la cantidad de piedras en el juego original es $2^n - 1$, entonces Juan podrá ganar. Si el número de piedras en el juego original no es $2^n - 1$, entonces está entre 2^n y $2^{n+1} - 2$ para algún n. En este caso, el primer paso de Alisa es igualar el número de piedras en la pila más grande a $2^n - 1$. Después de eso, Alisa gana

□

Problema 28. En una cuadrícula infinita juegan Ana y Belén. Cada jugada consiste en pintar un lado de una casilla de un color cualquiera. Está prohibido volver a pintar los lados pintados. Ana quiere en menos de 100 movimientos crear una línea cerrada en la que todos los segmentos sean de colores distintos, Belén intenta impedírselo. ¿Quién gana?

Solución. Siempre que Ana pinta una línea vertical de un color, Belén pinta del mismo color el segmento horizontal que, junto con el de Ana, forma una L, y viceversa, siempre que Ana pinta un segmento horizontal Belén lo completa con uno vertical hasta formar una L del mismo color. Con la estrategia de Belén todas estas esquinas serán pintadas del mismo color. Gana Belén. □

Problema 29. Eva y María colocaron en la mesa 13 cartas diferentes. Cada carta puede estar boca arriba o boca abajo. En su jugada la jugadora debe voltear una carta. Pierde la jugadora después cuyo turno se repita alguna situación anterior (incluyendo la situación inicial). Eva hizo el primer movimiento. ¿Quién puede ganar independientemente de cómo juegue su oponente?

Solución. La estrategia ganadora de Eva consiste en voltear la misma carta cada vez (por ejemplo, la reina de picas). Todas las posibles posiciones se pueden dividir en parejas, diferenciadas solo por la posición de la reina de picas. Si en respuesta al movimiento de Eva, María también voltea la reina de picas, la posición anterior se repetirá y perderá. Por lo tanto, María está obligada a voltear otra carta. Y Eva, al voltear la reina de picas en respuesta, obtendrá una posición emparejada con la que acaba de suceder. Por lo tanto, en cada turno, María tendrá que “comenzar” una nueva pareja de posiciones, y Eva siempre podrá hacer un movimiento de respuesta, ‘terminando” la pareja. Dado que la cantidad de posiciones posibles es finita, tarde o temprano María no podrá abrir una nueva pareja y perderá.

□

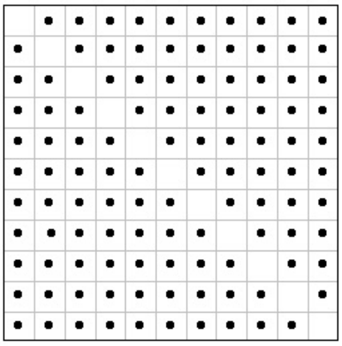
Problema 30. En una línea están sentados 2024 saltamontes. En cada turno, uno de los saltamontes salta sobre otro para terminar a la misma distancia de él en otro lado. Saltando solo hacia la derecha, los saltamontes pueden lograr que dos de ellos estén exactamente a 1 mm de distancia uno del otro. Demuestra que los saltamontes pueden lograr lo mismo saltando desde la posición inicial solo hacia la izquierda.

Solución. Llamemos al saltamontes más a la izquierda Iván. Supongamos que inicialmente todos los demás saltamontes saltan sobre Iván. Ahora los saltamontes están en una posición simétrica a la posición inicial. Por lo tanto, utilizando movimientos simétricos a los que harían al saltar hacia la derecha, pueden lograr lo requerido.

□

Problema 31. Juan y Pablo están jugando al siuiente juego. Al principio, hay 11 montones de 10 piedras cada uno sobre la mesa. Los jugadores se turnan, empezando por Juan. En cada turno, un jugador toma 1, 2 o 3 piedras, pero Juan en cada turno siempre elige todas las piedras del mismo montón, mientras que Pablo siempre elige todas las piedras de montones diferentes (si coge más de una piedra). Pierde el jugador que no puede realizar un movimiento. ¿Cuál de los jugadores puede asegurarse la victoria, sin importar cómo juegue su oponente?

Solución. Coloquemos las piedras como se muestra en la imagen, donde los montones corresponden a las columnas.



Juan debe tomar las piedras de una columna, mientras que Pablo debe tomarlas de diferentes columnas. La estrategia de Pablo es hacer movimientos simétricos a los de Juan con respecto a la diagonal vacía. Inicialmente, la imagen es simétrica. Dado que la fila simétrica a la columna no comparte piedras con ella, Pablo siempre puede restaurar la simetría rota en cada turno, lo que significa que siempre tiene un movimiento. Dado que el juego es finito, en algún momento Juan perderá.

□

Problema 32. Dos jugadores trazan diagonales en un polígono regular de $2n + 1$ lados ($n > 1$) por turnos. Se permite trazar una diagonal si no fue trazada anteriormente y se cruza (en puntos interiores del polígono) con un número par de diagonales trazadas previamente. Pierde el jugador que no puede realizar el siguiente movimiento. ¿Quién ganará en este juego?

Solución. Observemos que a un lado de cada diagonal hay un número par de vértices, y al otro lado hay un número impar. Por lo tanto, cada diagonal atraviesa un número par de otras diagonales en el polígono de $2n+1$ lados. Supongamos que en algún momento del juego no es posible realizar un movimiento, entonces cada diagonal no trazada cruza un número impar de diagonales ya trazadas, y por lo tanto, un número impar de diagonales no trazadas.

Consideramos un grafo cuyos vértices son diagonales no trazadas y dos diagonales están conectadas por una arista si se cruzan. Por lo anterior, el grado de cada vértice de este grado es impar. Entonces, el número de vértices es par. Concluimos que el número de diagonales no trazadas es par.

Por lo tanto, si el número total de diagonales en el polígono es impar, el primer jugador ganará, y si es par, el segundo jugador ganará. En un polígono de $2n + 1$ lados, el número de diagonales es igual a $(2n + 1)(n–1)$, lo que significa que es impar cuando n es par y par cuando n es impar.

El primer jugador gana cuando n es par y pierde cuando n es impar.

□

Problema 33. Sean n, m y k tres números naturales. Tenemos una torre de $n \times m \times k$ formada por cubitos $1 \times 1 \times 1$. Juegan dos jugadores turnándose a un juego que consiste en que, en cada turno, el jugador al que le toca jugar elige un cubito, y retira de la torre todos los cubitos que queden arriba, a la derecha y delante del cubito escogido. Es decir, todos los cubos se pueden describir por tres coordenadas (a, b, c) tal que $1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq m$ y $1 \leq c \leq k$, y si escogemos el cubito en la posición (a, b, c) en nuestro turno, quitaremos todos los cubitos en las posiciones (a', b', c'), donde $a \leq a' \leq n$, $b \leq b' \leq m$ y $c \leq c' \leq k$. Pierde el jugador que elige el último cubito,que necesariamente está en la posición $(1, 1, 1)$.

a) ¿Puede tener el segundo jugador una estrategia ganadora?

Pista: Si tuviera estrategia ganadora, también la tendría si el primer jugador eligiera el cubito en posición (n, m, k) en la primera jugada.

b) ¿Puede tener el primer jugador una estrategia ganadora?

Solución. a) No puede. Si la tuviera, podría contrarrestar que el primer jugador eligiera el cubito en posición (n, m, k) en la primera jugada eligiendo en su primera jugada el cubito $(a, b, c) \neq (n, m, k)$, donde $1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq m$ y $1 \leq c \leq k$. Pero la posición resultante de esta jugada es la misma que habría después de la primera jugada del primer jugador si éste hubiera escogido el cubito (a, b, c) en su primer turno. Por tanto, si el segundo jugador tuviera estrategia ganadora, el primero se la podría robar, por lo que el segundo no tendría estrategia ganadora y llegamos a una contradicción.

b) Sí. Como el segundo jugador no tiene estrategia ganadora, existe una primera jugada que puede hacer el primer jugador que no le otorga una estrategia ganadora al segundo. Por tanto, haga lo que haga el segundo en su primera jugada, habrá una segunda jugada que puede hacer el primer jugador que no le otorga una estrategia ganadora al segundo. Este juego es finito y discreto, por lo que acabará, y como no puede acabar en empate, necesariamente acabará ganando el primero si sigue esta estrategia (ya que sabemos que el segundo no se puede asegurar ganar).

$\square$

Problema 34. Jugamos al juego del Problema 33 en una torre $2 \times 2 \times 5$. Para referirnos a las distintas posiciones del juego, seguimos la siguiente convención: numeramos las columnas como 1 (izquierda detrás), 2 (derecha detrás), 3 (izquierda delante) y 4 (derecha delante), y denotamos las distintas posiciones como (x, y, z, t) para indicar que hay x cubos en la columna 1, y cubos en la columna 2, z cubos en la columna 3 y t cubos en la columna 4.

Demuestra que las siguientes posiciones son posiciones ganadoras:

$$\begin{array}{ccc}
(1,1,1,0) & (2,2,2,1) & (3,3,3,2) \\
(4,4,4,3) & (5,5,5,2) & (5,0,4,0) \\
(5,4,0,0) & (5,1,3,1) & (5,3,1,1) \\
(5,2,2,2) & (4,0,3,0) & (4,3,0,0) \\
(4,1,2,1) & (4,2,1,1) & (3,0,2,0) \\
(3,2,0,0) & (3,1,1,1) & (2,0,1,0) \\
(2,1,0,1) & (1,0,0,0) &
\end{array}$$

¿Ves algún patrón?

Solución. La posición final (que es ganadora) es $(1, 0, 0, 0)$, que es del segundo tipo. Ahora, como el juego es finito y discreto y no puede acabar en empate, sólo hay que ver que a partir de una de las posiciones de la lista, el siguiente jugador no puede llegar a una de las posiciones de la lista, y, que haga lo que haga éste, se puede llegar a otra de las posiciones de la lista en la siguiente jugada.

Nosotros en esta solución vamos a ver algo más general. Vamos a demostrar que las siguientes posiciones son posiciones ganadoras en un juego $2 \times 2 \times n$:

- $(p, p, p, p - 1)$ para todo p tal que $1 \leq p \leq n$.
- $(p, a, b, \text{mín}\{a, b\})$ para todo p, a, b tal que $1 \leq p \leq n$ y $a + b = p - 1$.

En este árbol, l cumple necesariamente que $0 \leq l < p$, y s cumple necesariamente que $0 \leq s < p - 1$

$$\begin{tikzcd}
& (l,l,l,l) \arrow[r, "4"] & (l,l,l,l-1) \\
(p,p,p,p-1) \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "3"] \arrow[ddr, "4"] & (p,l,p,l) \arrow[r, "3"] & (p,l,p-l-1,\text{mín}\{p-l-1,l\}) \\
& (p,p,l,l) \arrow[r, "2"] & (p,p-l-1,l,\text{mín}\{p-l-1,l\}) \\
& (p,p,p,s) \arrow[r, "1"] & (s+1,s+1,s+1,s)
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora qué pasa a partir de una de las posiciones del segundo tipo en la lista. Por simetría, podemos asumir que la posición es $(p, a, b, \text{mín}\{a, b\})$, donde $a \leq b$. Si el siguiente escoge un cubito en la columna 1, la siguiente posición es

- (l, l, l, l) si $l \leq a$ (y necesariamente $0 < l$). En este caso, por el árbol anterior ya sabemos que en la siguiente jugada se puede llegar a una posición de la lista.

- (l, a, l, a) si $a < l \leq b$. En este caso, por el árbol anterior ya sabemos que en la siguiente jugada se puede llegar a una posición de la lista.

- (l, a, b, a) si $b < l < p$. En este caso, escogiendo un elemento de la columna 3, en la siguiente jugada podemos llegar a $(l, a, l - a - 1, \text{mín}\{a, l - a - 1\})$, que es una posición de la lista.

Si el siguiente escoge un cubito en la columna 2, la siguiente posición es (p, l, b, l) para algún l tal que $0 \leq l < a$. En este caso, escogiendo un elemento de la columna 1, en la siguiente jugada podemos llegar a $(l + b + 1, l, b, l)$, que es una posición de la lista.

Si el siguiente escoge un cubito en la columna 3, la siguiente posición es $(p, a, l, \text{mín}\{l, a\})$ para algún l tal que $0 \leq l < b$. En este caso, escogiendo un elemento de la columna 1, en la siguiente jugada podemos llegar a $(l + a + 1, a, l, \text{mín}\{l, a\})$, que es una posición de la lista.

Si el siguiente escoge un cubito en la columna 4, la siguiente posición es (p, a, b, l) para algún l tal que $0 \leq l < a$. En este caso, escogiendo un elemento de la columna 1, en la siguiente jugada podemos llegar a $(l + 1, l + 1, l + 1, l)$, que es una posición de la lista. Esto termina el análisis de todos los casos.

Por tanto, queda demostrado que las posiciones que nos dicen son ganadoras. $\square$