PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023-2024

Fecha: 5, 12 y 19 de abril de 2024 **Grupos Júpiter y Urano**

Juegos

Para esta hoja, recomendamos leerla en orden hasta completar el Problema 7. A partir de allí, se pueden hacer los problemas en el orden que se desee, aunque avisamos de que los problemas más difíciles suelen estar al final de la hoja.

Análisis de posiciones

En esta hoja vamos a analizar algunos juegos matemáticos finitos y discretos.

Definición 1.

- Un juego se llama **finito** si, hagan lo que hagan los jugadores, siempre termina después de un número finito de jugadas.
- Un juego se llama **discreto** si en cada turno los jugadores tienen un número finito de jugadas posibles.

Ejemplo resuelto. El Tres-En-Raya no puede durar más de 9 jugadas porque el tablero solamente tiene 9 casillas, por lo que es un juego finito. Por cierto, no tiene por qué terminar después de 9 jugadas, la partida más corta dura 5 jugadas. Además, es un juego discreto: en la primera jugada el jugador que empieza tiene 9 opciones posibles, y con cada jugada quedan menos.

Problema 1. Considera el siguiente juego: vamos colocando monedas de 1€ encima de un folio de tamaño A4. Está prohibido colocar una moneda encima de otra. El que no puede mover, pierde. ¿Es este un juego finito? ¿Es discreto?

Problema 2. ¿Sabrías decir si es finito y/o discreto el 5 en raya en un tablero de 15×15? ¿Y el 5 en raya en un tablero infinito?

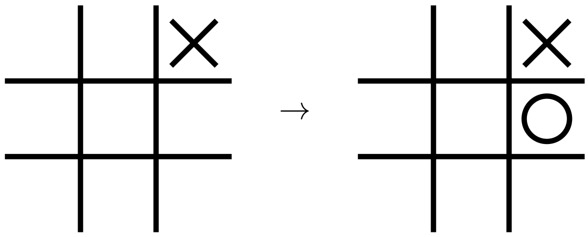
Problema 3. Describe un juego que sea discreto pero no finito.

Se puede demostrar que en un juego discreto y finito hay un número finito de posiciones, por lo que − en teoría − un superordenador sabría calcularlas todas y determinar en cada posición la mejor jugada posible. En la práctica a menudo es imposible, por ejemplo, para el 5 en raya en un tablero de 15×15 existen... ¡más de 10^{100} posiciones!

Definición 2. En un juego de dos jugadores A y B, decimos que el jugador A tiene **estrategia ganadora** si, haga B lo que haga, siempre hay una serie de jugadas que A puede hacer para contrarrestar las jugadas de B y que aseguran que el jugador A acabe ganando.

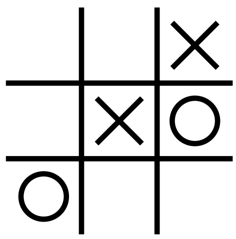
Si el jugador A tiene estrategia ganadora, las jugadas que el jugador A puede hacer para asegurarse que gana suelen depender de las jugadas que haga el jugador B. **Tener una estrategia ganadora no es lo mismo que ganar una partida**: un jugador puede tener estrategia ganadora, pero si no juega de manera óptima la puede perder.

Ejemplo resuelto. Una partida de tres en raya discurre así:



A partir de este punto, el primer jugador tiene estrategia ganadora: Lo primero que puede hacer para asegurarse la victoria es poner una X en la casilla del centro. Ahora, hay dos posibilidades.

- El segundo jugador no pone una O en la casilla de abajo a la izquierda: Entonces, el primer jugador gana en la siguiente jugada.
- El segundo jugador pone una O en la esquina de abajo a la izquierda: Entonces, el tablero queda así

  Si el primer jugador pone una X en la esquina de arriba a la izquierda, podrá ganar en su siguiente turno haga lo que haga el segundo jugador.

Problema 4. En la situación del ejemplo anterior, supón que el primer jugador NO hubiera elegido la casilla del centro en su segundo turno. Describe (si es que existe) otro posible movimiento del primer jugador en su segundo turno de manera que, a partir de ese momento,

a) mantenga su estrategia ganadora,

b) pierda su estrategia ganadora, pero no pase a tener estrategia ganadora el otro jugador,

c) pase a tener estrategia ganadora el otro jugador.

Definición 3. En un juego de dos jugadores que juegan por turnos, la posición se llama

- **ganadora** si al llegar tú a esta posición tras tu turno, tienes estrategia ganadora a partir de ese momento, y
- **perdedora** si al llegar tú a esta posición tras tu turno, tu adversario tiene estrategia ganadora a partir de ese momento.

Si has hecho bien la parte b) del Problema 4, sabes que hay posiciones que no son ganadoras ni perdedoras, ya que también hay posiciones en las que, si ambos jugadores juegan de manera óptima, se acaba en empate. Pero para los juegos finitos y discretos que, por sus reglas, no pueden acabar en empate, toda posición es o ganadora o perdedora.

Teorema 1. *No hay ninguna jugada que pase de una posición ganadora a otra ganadora.*

Demostración. La demostración de este teorema es muy sencillo. Si hubiera una jugada así, ¡ambos jugadores deberían ganar, lo que es imposible! □

Es importante darse cuenta de lo siguiente:

- De una posición ganadora solamente podemos llegar a una perdedora.
- No obstante, de una perdedora se puede llegar tanto a otra perdedora como a una ganadora.

Asegúrate de que entiendes por qué es esto antes de continuar con la hoja.

Problema 5. Dos jugadores por turnos retiran $1, 2$ o 3 cerillas de un montón de 16 cerillas. El que termina retirando la(s) última(s) cerillas gana. ¿Quién gana, el que comienza o el segundo? Busca las posiciones ganadoras para este juego.

Uno de los procedimientos habituales en el análisis de juegos es la "marcha atrás", que consiste en empezar el análisis desde el final hacia el principio. Si, por las reglas de ese juego, hay una posición final y quien llega a esa posición gana, buscaremos primero todas las posiciones desde las que podemos llegar a la posición final en un movimiento. Esas posiciones serán todas perdedoras. En el Problema 5, estas posiciones perdedoras inmediatamente anteriores a la posición final son dejar 1, 2 o 3 cerillas en la mesa. Ahora bien, las posiciones desde la que se llega sóla y exclusivamente a estas perdedoras serán ganadoras. En el Problema 5, sólo hay una posición ganadora inmediatamente anterior a las posiciones 1, 2 y 3, que es la posición en la que dejamos 4 cerillas en la mesa a nuestro contrincante.

La simetría

Crear una posición simétrica puede ser una estrategia ganadora para juegos en los que pierde el que ya no puede jugar. Esto funciona si ocurren estas dos cosas:

- a nuestro rival con cada jugada no lo queda más remedio que romper la simetría, y
- nosotros siempre la podemos restituir copiando su jugada simétricamente.

Recuerda que hay distintos tipos de simetría: a veces podemos usar la simetría axial (respecto a una recta), otras nos resultará más útil la simetría rotacional de 180°.

Vamos a analizar el siguiente juego usando simetría.

Problema 6. En un tablero de 6×6 dos jugadores colocan por turnos un dominó (una ficha 2×1 que cubre dos casillas). El que no puede mover pierde. ¿Quién gana y cuál es su estrategia?

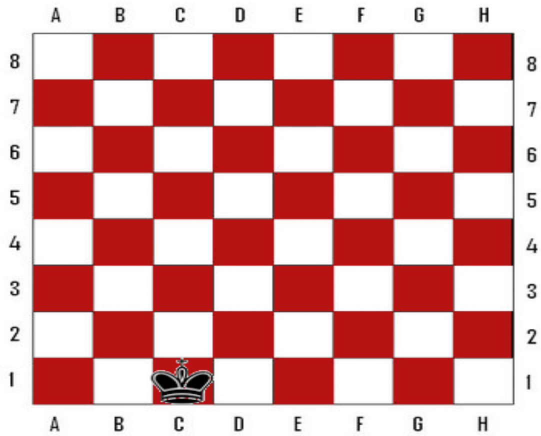
La paridad

La paridad no solamente es un importante concepto matemático, sino que puede usarse como estrategia en muchos juegos matemáticos. **En el siguiente problema busca una cantidad de cuya paridad dependa el éxito del juego.**

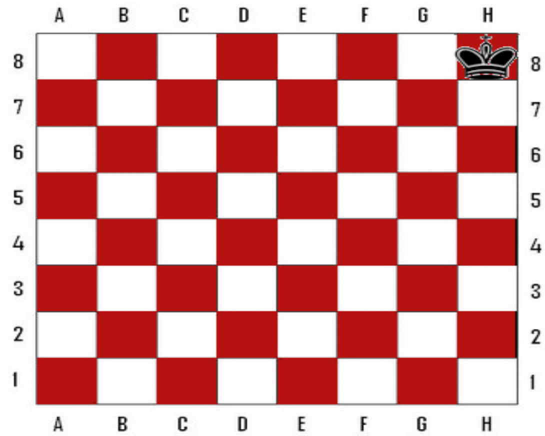
Problema 7. Los jugadores tienen delante dos montones de piedras, uno con 30 y el otro con 31 piedras. Cada jugada consiste en descartar uno de los dos montes de piedras y dividir el otro en dos montones no necesariamente iguales (pero de manera que cada montón tenga al menos una piedra). Pierde el jugador que no puede mover, lo que ocurre si tiene dos montones de 1 piedra delante. Indica un movimiento ganador y una estrategia para el primer jugador.

Pista. Piensa en números pares e impares. ¿Qué tienen que ver con este problema?

Problema 8. En un tablero de ajedrez se coloca el Rey en la casilla $c1$. Los jugadores lo mueven por turnos una casilla hacia arriba, a la derecha o en diagonal arriba-derecha. Cualquier otra dirección está prohibida. Gana el que consigue colocarlo en la casilla $h8$.



(a) Posición inicial



(b) Posición final

¿Quién gana, el primero o el segundo? Describe la estrategia ganadora. ¿Cuál es la jugada ganadora?

Problema 9. Llamemos "Vasallo" a una nueva pieza de ajedrez que puede avanzar 2 casillas en horizontal, vertical o diagonal hacia arriba o hacia la derecha. Empezando en $c1$, y repitiendo el juego del problema anterior pero con el vasallo en vez de con el rey, ¿quién gana, el primero o el segundo?

Problema 10. Tenemos 2 filas de piedras, en una fila hay 5 piedras, en la otra, 7. Cada jugada consiste en quitar la cantidad de piedras que quieras de una fila. El jugador que retira la(s) última(s) piedra(s) gana. ¿Quién gana, el primero o el segundo? Describe la estrategia ganadora. ¿Cuál es la jugada ganadora?

Problema 11. Busca todas las posiciones ganadoras finales en el juego de Tres-en-raya-con-cruces, en el que ambos jugadores usan las cruces y **pierde** el que forma un tres en raya. Por posición ganadora final nos referimos a una posición ganadora en la que el siguiente jugador perderá en su siguiente turno haga lo que haga.

Problema 12. ¿Quién gana en el juego de Tres en raya sólo con cruces explicado en el problema anterior?

Problema 13. Dos jugadores mueven por turnos la Reina en un tablero de ajedrez empezando en la casilla $c1$. La Reina se mueve cualquier cantidad de casillas hacia la derecha, hacia arriba o en diagonal derecha-arriba. Busca las posiciones ganadoras si gana el que consigue colocarla en la casilla $h8$.

Problema 14. Dos jugadores, Andrés y Beltrán, juegan al siguiente juego. Por turnos van escribiendo en la pizarra números enteros con la condición de que no puede haber dos números cuya resta sea múltiplo de 5 (por ejemplo, si en la pizarra está el número 37, no podemos escribir ni 32, ni 42, ni 7 ni 87...). Si empieza Andrés, ¿quién gana jugando bien?

Problema 15. Omar tiene cinco tarjetas, todas tienen una cara blanca y otra negra. Empieza con las cinco tarjetas en la mesa de manera que la cara visible de todas ellas es la blanca. En cada turno puede darle la vuelta a k tarjetas a la vez. Omar quiere acabar con las cinco tarjetas en la mesa de manera que la cara visible de todas ellas es la negra.

a) ¿Puede conseguir su objetivo si $k = 3$ en todos los turnos?

b) ¿Y si $k = 2$ en todos los turnos?

Para cada apartado, encuentra una manera en la que Omar logra su objetivo o demuestra que es imposible.

Problema 16. Dos personas colocan caballos por turnos en las casillas de un tablero de ajedrez de manera que los caballos no se capturen entre sí. Pierde aquel que no puede realizar un movimiento. Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbela.

Solución. Gana el segundo. Puede utilizar tanto la simetría con respecto del punto central, como con respecto de cualquier eje que corta el tablero en dos tableros 4 por 8.

□

Problema 17. Dos piratas, Bill y John, tienen cada uno 74 monedas de oro. Deciden jugar un juego en el que, por turnos, colocarán monedas en la mesa, con la regla de que en un solo turno pueden colocar una, dos o tres monedas a la vez. El ganador será quien coloque la centésima moneda en la mesa. Bill comienza. Si un jugador se queda sin monedas antes que haya 100 monedas en la mesa, pierde. ¿Quién puede ganar en este juego, independientemente de cómo actúe su oponente? (¡Ojo! sólo tienen 74 monedas)

Problema 18. Seis matemáticas se colocan formando un corro. Se les pone a cada uno de ellas un gorro que está pintado de manera aleatoria de rojo o de azul. Ninguna de las matemáticas puede ver el color de su gorro, pero sí puede ver el color del gorro de las otras cinco matemáticas. Si las matemáticas pueden elegir una estrategia conjuntamente de antemano, describe una estrategia que pueden seguir para maximizar la probabilidad de que todas ellas adivinen correctamente el color de su gorro en silencio, y calcula esa probabilidad.

Por ejemplo, si siguieran la estrategia de adivinar aleatoriamente, tendrían una probabilidad de $\frac{1}{2^6}$ de acertar todas. Sin embargo, si siguieran la estrategia de decir el mismo color del gorro de la matemática que está dos puestos a la derecha, acertarían si todas tuvieran el gorro rojo, todas azules, o los gorros fueran alternando entre azul y rojo en el círculo, es decir, acertarían en 4 ocasiones de 2^6 posibles. Por tanto, la probabilidad de acertar todas con esta estrategia es $\frac{4}{2^6} = \frac{1}{16}$, y esto es mejor que adivinar aleatoriamente.

Problema 19. Azucena y Bárbara son rivales jugando al siguiente juego: se colocan junto a otras 2023 personas formando un círculo, pero no sabemos cuántas personas tienen entre ellas dos. Las dos se turnan haciendo jugadas, y en cada jugada la jugadora a la que le toca jugar quita del círculo a uno de sus dos vecinos (el que quiera). Gana la primera jugadora que quita a su rival del círculo. Empieza jugando Azucena. ¿Podemos determinar qué jugadora tiene estrategia ganadora, es decir, qué jugadora puede ganar haga lo que haga la otra?

Problema 20. Ainara y Blanca están jugando a "Tres En Raya Mal", en el que inicialmente hay una X en un papel, y las jugadoras se turnan escribiendo una X o una O (a su elección) al final de la palabra escrita en el papel, creando una secuencia de X's y O's. Ainara es la primera en jugar. Pierde la jugadora que primero consigue una subsecuencia de tres X's o tres O's equiespaciadas en la palabra. Por ejemplo, si en el papel está escrita la palabra $XOXXOX$, es el turno de Blanca y esta tendrá que elegir escribir una O, ya que si escribiera X perdería, porque las letras subrayadas en $\underline{X}OX\underline{X}OX\underline{X}$ son una subsecuencia de X's que están equiespaciadas (entre dos consecutivas hay el mismo número de letras, en este caso dos). Sin embargo, si Blanca elige la O se asegura que gana, porque tanto $XOX\underline{X}O\underline{X}O\underline{X}$ como $X\underline{O}XX\underline{O}XO\underline{O}$ son posiciones perdedoras.

Suponiendo que ambas juegan de manera optima después de la primera jugada de Ainara,

a) ¿quién ganará si Ainara empieza colocando una X al lado de la X inicial?,

b) ¿quién ganará si Ainara empieza colocando una O al lado de la X inicial?

Problema 21. Ari y Braulio juegan a un juego en el que empiezan con una fila de 20 cuadrados, y se turnan tachando uno de los cuadrados. El juego acaba cuando quedan dos cuadrados sin tachar. Ari gana si los cuadrados que quedan tienen un lado en común, y Braulio gana en caso contrario.

a) Si Ari es la que empieza jugando (la que tacha el primer cuadrado), ¿quién de los dos tiene estrategia ganadora?

b) Y si es Braulio el que empieza jugando, ¿quién tiene estrategia ganadora?

Problema 22. Amelia y Bibiana se turnan eligiendo un número entero no negativo, y en cada turno el número que eligen tiene que ser el resultado de cambiar un dígito del número que acaba de escoger su compañera. Pierde la primera persona en elegir un número que ya ha sido elegido. Si Amelia es la primera en jugar, y las dos juegan de manera óptima, ¿quién gana?

Observación: No hay ceros por delante de un número, salvo en el número 0. Por ejemplo, si una persona elige el 2020, la otra podría responder eligiendo el $0020 = 20$ (cambiando el primer 2 por un 0), y a partir de entonces se jugaría con un número de dos o menos cifras.

Problema 23. Aitor y Begoña juegan a un juego en una cuadrícula infinita. Se turnan coloreando segmentos, Aitor en rojo y Begoña en azul. Los segmentos que colorean tienen que ser un lado de uno de los cuadraditos más pequeños que forman la cuadrícula, y no se pueden colorear segmentos que ya hayan sido coloreados previamente. Aitor gana si consigue crear un camino cerrado en color rojo, Begoña gana si puede evitar indefinidamente que Aitor gane. Empieza jugando Aitor. ¿Puede Aitor tener una estrategia ganadora?

Problema 24. Pablo está situado en el centro de un prado circular de radio igual a 100 metros. Cada minuto da un paso de longitud de 1 metro. Antes de cada paso, anuncia la dirección en la que quiere avanzar. Sofia puede hacer que cambie su dirección a la opuesta. ¿Puede Pablo actuar de tal manera que inevitablemente salga del prado en algún momento, o Sofia siempre puede impedírselo?

Problema 25. Se tienen 2024 tarjetas con un 1 dibujado y 2024 tarjetas con un 2. Lucía organiza estas tarjetas para formar un número de 4048 dígitos. En un solo movimiento, Darío puede intercambiar dos tarjetas y pagar 1 euro a Lucía. El proceso termina cuando Darío obtiene un número divisible por 11. ¿Cuál es la suma máxima que Lucía puede ganar si Darío intenta pagar lo menos posible y juega la estrategia óptima?

Problema 26. Álvaro escribe un número entero positivo en cada cuadrado de un tablero 1000×1000. Cada segundo que pasa, Berta elige una casilla con valor al menos 5 (si es que existe), le resta 4 al valor de ese cuadrado, y suma 1 al valor de las casillas adyacentes (los que comparten una arista con la casilla elegida). Si no existe una casilla con valor al menos cinco, decimos que el proceso ha acabado.

a) Sea S la suma de todos los valores de las 1000^2 casillas del tablero. Demuestra que S solamente puede mantenerse o decrecer en cada segundo que pasa.

b) Si una configuración de valores en el tablero apareciera dos veces, demuestra que los elementos de la fila superior no cambiarían desde la primera vez que aparece la configuración hasta la segunda vez que aparece.

c) Usando la parte anterior demuestra que, haga lo que haga Berta, y haya escrito Álvaro los números que haya escrito al principio, nunca puede aparecer una configuración de valores en el tablero que ya haya aparecido previamente.

d) Usando la parte anterior concluye que haga lo que haga Berta, y haya escrito Álvaro los números que haya escrito al principio, el proceso siempre acabará.

Problema 27. Alisa y Juan juegan el siguiente juego. Hay un montón de 100 piedras sobre la mesa. Los chicos se turnan para hacer movimientos y Alisas empieza. Al realizar un movimiento, el jugador divide cada pila que contiene más de una piedra en dos pilas más pequeñas. Gana aquel que, pasado su turno, deja montones de una piedra en cada pila. Encuentra una estrategia ganadora para alguno de los ganadores.

Problema 28. En una cuadrícula infinita juegan Ana y Belén. Cada jugada consiste en pintar un lado de una casilla de un color cualquiera. Está prohibido volver a pintar los lados pintados. Ana quiere en menos de 100 movimientos crear una línea cerrada en la que todos los segmentos sean de colores distintos, Belén intenta impedírselo. ¿Quién gana?

Problema 29. Eva y María colocaron en la mesa 13 cartas diferentes. Cada carta puede estar boca arriba o boca abajo. En su jugada la jugadora debe voltear una carta. Pierde la jugadora después cuyo turno se repita alguna situación anterior (incluyendo la situación inicial). Eva hizo el primer movimiento. ¿Quién puede ganar independientemente de cómo juegue su oponente?

Problema 30. En una línea están sentados 2024 saltamontes. En cada turno, uno de los saltamontes salta sobre otro para terminar a la misma distancia de él en otro lado. Saltando solo hacia la derecha, los saltamontes pueden lograr que dos de ellos estén exactamente a 1 mm de distancia uno del otro. Demuestra que los saltamontes pueden lograr lo mismo saltando desde la posición inicial solo hacia la izquierda.

Problema 31. Juan y Pablo están jugando al siuiente juego. Al principio, hay 11 montones de 10 piedras cada uno sobre la mesa. Los jugadores se turnan, empezando por Juan. En cada turno, un jugador toma 1, 2 o 3 piedras, pero Juan en cada turno siempre elige todas las piedras del mismo montón, mientras que Pablo siempre elige todas las piedras de montones diferentes (si coge más de una piedra). Pierde el jugador que no puede realizar un movimiento. ¿Cuál de los jugadores puede asegurarse la victoria, sin importar cómo juegue su oponente?

Problema 32. Dos jugadores trazan diagonales en un polígono regular de $2n+1$ lados ($n > 1$) por turnos. Se permite trazar una diagonal si no fue trazada anteriormente y se cruza (en puntos interiores del polígono) con un número par de diagonales trazadas previamente. Pierde el jugador que no puede realizar el siguiente movimiento. ¿Quién ganará en este juego?

Problema 33. Sean n, m y k tres números naturales. Tenemos una torre de $n \times m \times k$ formada por cubitos $1 \times 1 \times 1$. Juegan dos jugadores turnándose a un juego que consiste en que, en cada turno, el jugador al que le toca jugar elige un cubito, y retira de la torre todos los cubitos que queden arriba, a la derecha y delante del cubito escogido. Es decir, todos los cubos se pueden describir por tres coordenadas (a, b, c) tal que $1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq m$ y $1 \leq c \leq k$, y si escogemos el cubito en la posición (a, b, c) en nuestro turno, quitaremos todos los cubitos en las posiciones (a', b', c'), donde $a \leq a' \leq n$, $b \leq b' \leq m$ y $c \leq c' \leq k$. Pierde el jugador que elige el último cubito,que necesariamente está en la posición $(1, 1, 1)$.

a) ¿Puede tener el segundo jugador una estrategia ganadora?

   Pista: Si tuviera estrategia ganadora, también la tendría si el primer jugador eligiera el cubito en posición (n, m, k) en la primera jugada.

b) ¿Puede tener el primer jugador una estrategia ganadora?

Problema 34. Jugamos al juego del Problema 33 en una torre $2 \times 2 \times 5$. Para referirnos a las distintas posiciones del juego, seguimos la siguiente convención: numeramos las columnas como 1 (izquierda detrás), 2 (derecha detrás), 3 (izquierda delante) y 4 (derecha delante), y denotamos las distintas posiciones como (x, y, z, t) para indicar que hay x cubos en la columna 1, y cubos en la columna 2, z cubos en la columna 3 y t cubos en la columna 4.

Demuestra que las siguientes posiciones son posiciones ganadoras:

$$\begin{array}{lll}
(1,1,1,0) & (2,2,2,1) & (3,3,3,2) \\
(4,4,4,3) & (5,5,5,2) & (5,0,4,0) \\
(5,4,0,0) & (5,1,3,1) & (5,3,1,1) \\
(5,2,2,2) & (4,0,3,0) & (4,3,0,0) \\
(4,1,2,1) & (4,2,1,1) & (3,0,2,0) \\
(3,2,0,0) & (3,1,1,1) & (2,0,1,0) \\
(2,1,0,1) & (1,0,0,0) &
\end{array}$$

¿Ves algún patrón?