PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Hoja de Aritmética III

Fecha: 1, 8, 15 de Marzo de 2024 **Grupo: Mercurio**

El teorema de Bezout

Consideremos el problema de verter una cantidad específica de líquido utilizando dos (a veces tres) recipientes vacíos. Solo se permiten dos operaciones: vaciar un recipiente y llenar otro hasta el borde.

Una persona tiene un barril con 12 pintas de vino y quiere regalar la mitad del vino, pero no tiene un recipiente de 6 pintas. Sin embargo, tiene dos recipientes vacíos de 8 pintas y 5 pintas. ¿Cómo se puede verter exactamente 6 pintas de vino utilizando estos recipientes?

Este es el problema más conocido de este tipo; se llama el problema de Poisson. El famoso matemático, y físico francés Siméon Denis Poisson (1781-1840) lo resolvió en su juventud y posteriormente dijo que este problema fue lo que lo inspiró a convertirse en matemático.

La solución al problema se puede escribir de la siguiente manera:

Recipiente de 8 pintas	0	8	3	3	0	8	6	6
Recipiente de 5 pintas	0	0	5	0	3	3	5	0

Debes entenderlo de la siguiente manera. Al principio, ambos recipientes están vacíos (primera columna). Llenamos el recipiente de 8 pintas (segunda columna), luego llenamos el recipiente de 5 pintas desde el primero (tercera columna), luego vertemos esas 5 pintas del recipiente más pequeño al barril que contenía 12 pintas (cuarta columna), luego transferimos 3 pintas de vino del recipiente de 8 pintas al recipiente de 5 pintas (quinta columna) y así sucesivamente hasta que el recipiente más grande tenga 6 pintas de vino.

Intenta resolver el problema de otra manera, llenando primero el recipiente de 5 pintas. ¿No será la solución más corta?

Resuelve los siguientes problemas.

Problema 1. ¿Cómo se puede obtener exactamente 1 litro de agua de un río utilizando dos bidones vacíos, uno de tres litros y otro de cinco litros?

Problema 2. ¿Es posible recoger exactamente 4 litros de agua del río utilizando dos cubos vacíos, uno de 12 litros y otro de 9 litros?

Pensemos en la generalización del apartado anterior. Supongamos que tenemos dos recipientes vacíos con capacidades de a litros y b litros, y se necesita recoger exactamente c litros de agua del río, donde a, b y c son números naturales, y c no supera el número más grande entre a y b. Si el número c no es divisible por el máximo común divisor de los números a y b, entonces, de manera similar a lo anterior, no es posible lograrlo.

(*Recordatorio*: d es el máximo común divisor de a y b si d divide a ambos y es el más grande con esta propiedad.)

Problema 3. ¿Qué sucede si c es divisible por el máximo común divisor de los números a y b? Demuestra que en este caso, el problema siempre tiene una solución. En particular, esto siempre es posible si los números a y b son coprimos.

(Ayuda 1: usa la identidad de Bezout: si el máximo común divisor de a y b divide a c entonces c se puede expresar como $c = a \cdot x + b \cdot y$, donde x, y son enteros.

Ayuda 2: si te resulta difícil trabajar con letras, piensa que $a = 8$ y $b = 11$.)

Teorema 1 (La identidad de Bezout)**.** *Si el máximo común divisor de a y b divide a c entonces c se puede expresar como $c = a \cdot x + b \cdot y$, donde x, y son enteros.*

Demostración. Tomemos el conjunto

$$S = \{ax + by > 0 : x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b$. Entonces, $b - a > 0$ está en S, por lo que S es un conjunto no vacío de números naturales positivos. Entonces existe un elemento mínimo $d \in S$, que sabemos que tiene la forma $ax' + by'$. Existen q y r con $0 \leq r < d$ tal que $a = qd + r$.

Pero entonces $r = a - qd$ es un número no negativo de la forma $ax + by$, pero más pequeño que d, por lo que debe ser necesariamente cero. Esto significa que d divide a a. Por un argumento completamente análogo, se sigue que d divide a b. Entonces, d es un divisor común de a y b. Pero si e es cualquier divisor común de a y b, debe dividir a $d = ax' + by'$. Según la definición del máximo común divisor, acabamos de demostrar que $d = ax' + by'$ es el máximo común divisor de a y b.

Si d divide a c, entonces está claro que c también se puede expresar como $c = a \cdot x + b \cdot y$. $\square$

Observamos que la demostración anterior proporciona una propiedad adicional del máximo común divisor d de a y b: si e divide a a y a b, entonces e divide a d.

Ahora planteamos la siguiente pregunta. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, ¿cómo encontrar $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $\text{mcd}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b$? Antes de contestar a esta pregunta, resolvemos primero el siguiente ejercicio.

Problema 4. Sean $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$, tales que $a = q \cdot b + r$. Demuestra que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$.

Este ejercicio nos proporciona una forma muy rápida de calcular $\text{mcd}(a, b)$. En vez de formular el algoritmo de manera formal veamos un ejemplo. Este algoritmo se llama el **algoritmo de Euclides**.

Ejemplo resuelto. Calcula $\text{mcd}(1026, 873)$ sin factorizar los números.

Solución. El algoritmo de Euclides consiste en sucesivas divisiones entre los números dados hasta llegar a un cociente de cero. El último divisor no nulo es el máximo común divisor de los números originales.

Dividimos 1026 por 873: $1026 = 1 \cdot 873 + 153$. El Ejercicio 4 nos dice que $\text{mcd}(1026, 873) = \text{mcd}(873, 153)$.

Ahora, dividimos 873 por 153: $873 = 5 \cdot 153 + 18$. Entonces $\text{mcd}(873, 153) = \text{mcd}(153, 18)$.

Luego, dividimos 153 por 18: $153 = 8 \cdot 18 + 9$. Tenemos $\text{mcd}(153, 18) = \text{mcd}(18, 9)$.

Finalmente, como $18 = 2 \cdot 9$, obtenemos que

$$\text{mcd}(1026, 873) = \text{mcd}(873, 153) = \text{mcd}(153, 18) = \text{mcd}(18, 9) = 9. \quad \square$$

Ahora podemos explicar como obtener los coeficientes en la identidad de Bezout. Otra vez en vez de explicar el procedimiento formalmente presentaremos un ejemplo. El algoritmo que usamos se llama el **algoritmo inverso de Euclides**.

Ejemplo resuelto. Encuentra algunos eneros x e y que cumplen $\text{mcd}(1026, 873) = 1026 \cdot x + 873 \cdot y$.

Solución. Recuperamos las igualdades aparecidas cuando aplicamos el algoritmo de Euclides para calcular $\text{mcd}(1026, 873)$, escribiendo las de esta forma

$$\begin{aligned} 153 &= 1026 - 1 \cdot 873 \\ 18 &= 873 - 5 \cdot 153 \\ 9 &= 153 - 8 \cdot 18 \end{aligned}$$

El proceso es ir sustituyendo desde abajo hacia arriba. En la última ecuación sustituimos 18 y agrupamos los terminos:

$$9 = 153 - 8 \cdot 18 = 153 - 8 \cdot (873 - 5 \cdot 153) = 41 \cdot 153 - 8 \cdot 873.$$

Ahora sustituimos 153 y agrupamos:

$$9 = 41 \cdot 153 - 8 \cdot 873 = 41 \cdot (1026 - 1 \cdot 873) - 8 \cdot 873 = 41 \cdot 1026 - 49 \cdot 873.$$

Por lo tanto $x = 41$ e $y = -49$ son soluciones buscadas. □

Problema 5. Encuentra algunos enteros x e y que cumplen

1. $\mathrm{mcd}(1067, 893) = 1067 \cdot x + 893 \cdot y.$

2. $\mathrm{mcd}(2037, 1512) = 2037 \cdot x + 1512 \cdot y.$

División módulo n

Uno de los propósitos de esta sección es demostrar el Teorema fundamental de Aritmética.

Teorema 2 (El teorema fundamental de Aritmética)**.** *Todo entero positivo $n > 1$ puede ser representado exactamente de una única manera como un producto de potencias de números primos:*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$

donde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ son primos y α_i son enteros positivos.

Seguramente lo has visto antes y te parece tan evidente que piensas que no requiere demostración. Sin embargo, su demostración rigurosa no es tam sencilla y requiere el teorema de Bezout que acabamos de ver.

Vamos a resolver las siguientes ecuaciones en congruencias:

Ejemplo resuelto. Encuentra **todas** las soluciones de estas ecuaciones.

a) $2x \equiv 4 \pmod{5}$

b) $2x \equiv 2 \pmod{5}$

c) $2x \equiv 5 \pmod{10}$

d) $2x \equiv 6 \pmod{10}$

e) $6x \equiv 2 \pmod{10}$

f) $15x \equiv 0 \pmod{10}$

Solución.

a) $x \equiv 2 \pmod{5}$

b) $x \equiv 1 \pmod{5}$

c) No hay ninguna solución. .

d) $x \equiv 3, 8 \pmod{10}$

e) $x \equiv 2, 7 \pmod{10}$

f) $x \equiv \pmod{2} \equiv 0, 2, 4, 6, 8, \pmod{10}$

□

Vemos que algunas ecuaciones en congruencias tienen una solución, algunas ninguna y algunas tienen incluso varias soluciones. Vamos a intentar a explicarlo. Si queremos resolver la ecuación $2x = 4$ lo que vamos a hacer es dividir 4 por 2. ¿Podemos hacer algo parecido con las congruencias?

Ya sabemos "multiplicar" módulo n. Tómate un momento para hacer analepsis[1] a tu más tierna infancia y piensa qué significaría "dividir" módulo n. ¿Qué significaría decir que $3/2 \equiv 4 \pmod{5}$? ¿Qué era el "inverso"? ¿Qué tienen que ver dividir con el inverso? ¿Qué significaría decir que un número es el inverso de 2 módulo 5? ¿Puede ser que todos los números tengan inverso módulo n?

[1] *Analepsis*: Pasaje de una obra literaria que trae una escena del pasado rompiendo la secuencia cronológica. Sin.: flashback.

Que yo recuerde, decir que $3/2 = 4$ es decir que $2 \cdot 4 = 3$ (y también que 4 es el único número que cumple esto). El inverso de n es el (único) número x que cumple que $xn = 1$. Dividir es lo mismo que multiplicar por el inverso. Decir que 3 es el inverso de 2 módulo 5 es decir que $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$. No todos los números tienen inverso: el 0 no tiene inverso. 2 tampoco tiene inverso módulo 10, porque $2x$ siempre es par y no puede ser 1.

Problema 6. Demuestra que si para ciertos a y n la ecuación $ax \equiv 1 \pmod n$ tiene solución, entonces sólo hay una solución módulo n.

Problema 7. Demuestra que si $\mathrm{mcd}(a, n) \neq 1$, entonces $ax \equiv 1 \pmod n$ no tiene solución x.

Problema 8. Supón ahora que $\mathrm{mcd}(a, n) = 1$.

a) Demuestra que si $ax \equiv 0 \pmod n$, entonces $x \equiv 0 \pmod n$ (ayuda: usa el teorema de Bezout).

b) Demuestra que si $ax \equiv ay \pmod n$, entonces $x \equiv y \pmod n$.

c) Demuestra que los números $0, a, 2a, 3a, \ldots, (n-1)a$ son todos distintos módulo n.

d) Demuestra que existe un único x tal que $ax \equiv 1 \pmod n$.

Problema 9. Sea p un número primo y $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si p divide a ab entonces p divide a a o p divide a b. (Queremos usar este ejercicio para demostrar el teorema fundamental de Aritmética. Por eso no usa el teorema fundamental de Aritmética para resolver este ejercicio).

Ahora podemos demostrar el Teorema fundamental de Aritmética.

Demostración del Teorema fundamental de Aritmética. La existencia de una factorización es evidente, porque cualquier descomposición en factores tiene que terminar en algún momento.

Para demostrar la unicidad supón que hay dos factorizaciones diferentes y usando el Problema 9 obtén una contradicción. □

Problema 10. Sea p primo. Supongamos que $a^2 \equiv 1 \pmod p$. Demuestra que $a \equiv \pm 1 \pmod p$.

Vamos a dar un paso más en nuestra forma de trabajar con congruencias. Dado un número n natural y a un número entero, entenderemos por $[a]_n$ todos los enteros $b \in \mathbb{Z}$ que cumplen $b \equiv a \pmod n$. Por ejemplo, $[2]_5 = \{2, 7, -3, -8. -10008, 127, \ldots\}$. Esta nueva notación evita escribir cada vez $\equiv \pmod n$.

Con esta notación tenemos que $[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$ y $[a]_n[b]_n = [ab]_n$. En total hay n congruencias $\pmod n$ y el conjunto de todas las congruencias se denota $\mathbb{Z}_n$. Por ejemplo, $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$. La tablas de la suma y la multiplicación de $\mathbb{Z}_5$ son las siguientes.

$+$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[1]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$
$[2]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$
$[3]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$

X	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0_5$
$[1]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[0]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[0]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[0]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Las tablas hay que entender de la siguiente forma: el resultado de operación de a y b está en la intersección de la fila de a y la columna de b.

Problema 11. Construye la tabla de multiplicación de $\mathbb{Z}_6$.

El teorema de Wilson se puede interpretar de la siguiente forma. Si p es primo, entonces

$$\prod_{[0]_p \neq [b]_p \in \mathbb{Z}_p} [b]_p = [-1]_p.$$

Ejemplo resuelto. Sea n un número natural. Demuestra que si n es coprimo con $a \in \mathbb{Z}$. Entonces cuando $[b]_n$ recorre todas las congruencias modulo n, $[a]_n[b]_n$ también las recorre y además cada congruencia aparece exactamente una vez. (En la tabla de multiplicación de $\mathbb{Z}_n$, $[a]_n[b]_n$ son los elementos que están en la fila que corresponde a $[a]_n$).

Solución. Es el Problema 8(c). $\square$

Teorema 3 (El pequeño teorema de Fermat)**.** *Sea p un número primo. Si a no es divisible por p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demostración. Queremos ver que $[a^{p-1}]_p = [1]_p$. Por el Teorema de Wilson el producto de todas las congruencias coprimas con p nos dan $[-1]_p$. Por lo tanto, por el Problema , también tenemos que

$$\prod_{[0]_p \neq [b]_p \in \mathbb{Z}_p} [a]_p[b]_p = [-1]_p.$$

Este producto es igual a

$$\prod_{[0]_p \neq [b]_p \in \mathbb{Z}_p} [a]_p[b]_p = ([a]_p)^{p-1} \prod_{[0]_p \neq [b]_p \in \mathbb{Z}_p} [b]_p = [a^{p-1}]_p \cdot [-1]_p.$$

Es decir, $[a^{p-1}]_p \cdot [-1]_p = [-1]_p$. Por lo tanto, $[a^{p-1}]_p = [1]_p$. $\square$

El teorema chino del resto

Se llama el teorema chino del resto por este problema del siglo V, del libro Sunzi Suanjing (El Manual Matemático de Sunzi).

Problema 12. Tenemos un número indeterminado de cosas. Si las contamos de tres en tres, sobran dos; de cinco en cinco, sobran tres; y de siete en siete, sobran dos. ¿Cuántas hay?

Notemos que podemos escribir el problema de Sunzi como un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Teorema chino del resto

Si n, m son primos entre sí, entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

tiene una solución, que es única módulo nm.

Problema 13. Demuestra el teorema chino del resto. Aquí tienes unas posibles pistas.

a) Demuestra que los restos de un número x módulo n y módulo m sólo dependen de su resto módulo nm. Concluye que para cada resto posible módulo nm, obtenemos una pareja de restos, al dividir por n y por m.

b) Cuenta cuántos posibles restos módulo nm hay, y cuántas posibles parejas de restos módulo n y módulo m hay. Por ejemplo, si $n = 2$ y $m = 3$, hay 6 posibles parejas:

$$(0 \pmod{2} \text{ y } 0 \pmod{3}), (1 \text{ y } 0), (0 \text{ y } 1), (1 \text{ y } 1), (0 \text{ y } 2), (1 \text{ y } 2).$$

c) Si tomamos todos los restos posibles, demuestra que todas las parejas de restos (módulo n y módulo m) son distintas. (Recuerda que n y m son primos entre sí). Por ejemplo, para $n = 2$ y $m = 3$, obtenemos parejas distintas:

(mód 6)	(mód 2)	(mód 3)
0	0	0
1	1	1
2	0	2
3	1	0
4	0	1
5	1	2

d) Demuestra que cada pareja de restos (a, b) se obtiene exactamente para un x.

Si n, m son primos entre sí, vamos a describir un método general para resolver el sistema.

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

Observemos que $x = a + t \cdot n = b + s \cdot m$ para algunos números enteros t y s. Por lo tanto, $b - a = t \cdot n - s \cdot m$. Como n, m son primos entre sí, el algoritmo inverso de Euclides nos proporciona números enteros t_0 y s_0 tales que $1 = t_0 \cdot n - s_0 \cdot m$. Por lo tanto, podemos poner $t = (b - a)t_0$ y concluir que $x = a + (b - a)t_0 \cdot n$ es una solución del sistema.

Problema 14. Resuelve estos sistemas de ecuaciones (es decir, encuentra todas las soluciones).

a) $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{3} \\ x \equiv 0 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{3} \\ x \equiv 8 \pmod{5} \\ x \equiv 8 \pmod{7} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{10} \end{cases}$

Problema 15. Describe un método para resolver

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

sin suponer que n y m son coprimos.

Problema 16. Si no hubiera años bisiestos, calcula cada cuántos años empezaría el año en lunes.

Problema 17. Dice Wikipedia que el año santo de Santiago de Compostela ocurre los años en los que el 25 de julio es domingo. Esto sucede con una cadencia regular de 6-5-6-11 años[2]. También dice que las cigarras del género *Magicicada* que salen del subsuelo a reproducirse cada 13 años y otras cada 17. En 2024, coincidirán las 2 en Illinois (de las poblaciones XIX y XIII, me podéis verificar la información).

- Explica qué es eso de la cadencia regular de 6-5-6-11 años.
- Los último cuatro años santos fueron 1999, 2004, 2010 y 2021. ¿Cuándo será la próxima vez que coincida el año santo con la salida de las poblaciones XIX y XIII)?

[2]Estoy ignorando lo que pasa cuando el año es divisible por 100, que no siempre es bisiesto, como bien sabes

Problemas

Problema 18. Un grupo de m amigos tiene n magdalenas iguales. Quieren dividir las magdalenas entre todos de manera que cada amigo reciba la misma cantidad, y lo quieren hacer dividiendo cada magdalena en algún número de partes (que no tienen por qué ser iguales, ni cada magdalena estar dividida de la misma forma), y luego asignando una o varias de esas partes a cada persona.

1. Si $m = 3$ y $n = 5$, demuestra que pueden dividir las magdalenas de manera que todas las piezas sean estrictamente más grandes que $\frac{1}{3}$ de magdalena.
2. Si $m = 5$ y $n = 3$, demuestra que pueden dividir las magdalenas de manera que todas las piezas sean estrictamente más grandes que $\frac{1}{5}$ de magdalena.

Problema 19. Un número de 2025 cifras es múltiplo de 27. Lo escribimos en círculo y lo rotamos varias posiciones. Demuestra que este nuevo número de 2025 cifras también es múltiplo de 27.

Problema 20. En el número A han cambiado las cifras de orden y han llamado el número resultante B. La resta $A - B = 11...1$ está compuesta por n unos. ¿Cuál es el mínimo n posible?

Problema 21. Amancio tiene una fábrica donde se embotella zumo de naranja. Está preparando un envío de 1.000.000 de botellas de zumo de naranja cuando se entera de que un error en la fábrica ha provocado que una de las botellas esté envenenada. Nadie sabe qué botella es, pero Amancio tiene sólo 20 tests de detección de veneno. Cada test se puede usar sólo una vez, pero puede llevarlo a cabo con cualquier cantidad de zumo de naranja que desee, y detectará si la muestra contiene veneno sea cual sea la concentración de veneno en la muestra. ¿Cómo puede determinar Amancio qué botella está envenenada?

Problema 22. Pensamos en una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ como una función f, que lleva cada número x a uno distinto $f(x)$. Llamamos $P(n)$ al número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que cumplen que $xf(x)$ es un cuadrado perfecto para todo x. Encuentra el mínimo n tal que $P(n)$ es múltiplo de 2024.

Problema 23. Para todo número entero positivo n, definimos $f(n)$ como $\frac{n}{2}$ si n es par, y como $5n + 1$ si n es impar. Denotamos por $f^1(n) = f(n)$, $f^2(n) = f(f(n))$, $f^3(n) = f(f(f(n)))$, etc. Encuentra el menor número entero positivo n para el cual $f^m(n) \neq 1$ para todo entero positivo m.

Problema 24. Demuestra que si n es un número entero positivo para el cual $2+2\sqrt{1 + 12n^2}$ es un número entero, entonces $2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ es un cuadrado perfecto.

Problema 25. Juan Carlos y Cris están jugando a un juego con n monedas en una mesa. Se turnan quitando 2, 5 o 6 monedas en cada turno. Pierde la persona que en su turno no puede quitar 2, 5 o 6 monedas. Si Juan Carlos es el primero en jugar, ¿para qué valores de n tendrá una estrategia ganadora[3]?

Problema 26. Los dígitos de N están en orden estrictamente creciente. ¿Cuánto suman las cifras de $9N$?

Problema 27. MAX ESTRELLA: ¡Don Latino de Hispalis, grotesco personaje, te inmortalizaré en una novela! ¿Sabías que tu número favorito es la suma de las edades de mis tortugas, y que tu número favorito es su producto?
LATINO: Una tragedia. No lo sabía, porque no conozco tu número favorito. Si me dijeras tu número favorito y cuántas tortugas tienes, sabría las edades de tus tortugas?
MAX: No. ¡Me estoy helando!
LATINO: Levántate. Vamos a caminar. Ahora ya sé que tu número favorito es...
¿Cuál es?

Problema 28. ¿Existen números enteros a y b para los cuales $a^2 = b^{15} + 1004$?

[3]Juan Carlos tiene una estrategia ganadora si, juegue Cris de la manera que juegue, Juan Carlos siempre puede contrarrestar los movimientos de Cris de manera que se asegure que acabará ganando

Problema 29. En una pizarra está escrito el número 0. Cada minuto que pasa, Juan Carlos reemplaza simultáneamente cada 0 de la pizarra por un 1 y cada 1 por un 10. Por ejemplo, si el número que estuviera escrito en la pizarra fuera 1100, al minuto siguiente sería 101011. En un momento dado Juan Carlos se cansa y se va, dejando un número N en la pizarra. Si N es divisible por 9, demuestra que N es divisible por 99.

Problema 30. Una sucesión infinita de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface que

$$\text{mín}(a_m, a_n) = a_{\text{mcd}(m,n)}$$

para todo par de enteros positivos m, n.

a) Para todo número real k tal que $k \leq \text{máx}(a_1, a_2, \ldots, a_{26})$, llamamos n_k al número entero mínimo tal que $a_{n_k} \geq k$. Demuestra que, para todo número entero positivo m,

$$a_m \geq k \quad \text{si y sólo si} \quad n_k \mid m.$$

b) Usa la parte anterior para demostrar que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{26} \leq a_{2023} + a_{2024} + \ldots + a_{2048}.$$

Problema 31. Seis matemáticas se colocan formando un corro. Se les pone a cada uno de ellas un gorro que está pintado de manera aleatoria de rojo o de azul. Ninguna de las matemáticas puede ver el color de su gorro, pero sí puede ver el color del gorro de las otras cinco matemáticas. Si las matemáticas pueden elegir una estrategia conjuntamente de antemano, describe una estrategia que pueden seguir para maximizar la probabilidad de que todas ellas adivinen correctamente el color de su gorro en silencio, y calcula esa probabilidad.

Por ejemplo, si siguieran la estrategia de adivinar aleatoriamente, tendrían una probabilidad de $\frac{1}{2^6}$ de acertar todas. Sin embargo, si siguieran la estrategia de decir el mismo color del gorro de la matemática que está dos puestos a la derecha, acertarían si todas tuvieran el gorro rojo, todas azules, o los gorros fueran alternando entre azul y rojo en el círculo, es decir, acertarían en 4 ocasiones de 2^6 posibles. Por tanto, la probabilidad de acertar todas con esta estrategia es $\frac{4}{2^6} = \frac{1}{16}$, y esto es mejor que adivinar aleatoriamente.

Problema 32. Seis matemáticas se colocan formando un corro alrededor de un árbol. Se les pone a cada uno de ellas un gorro que está pintado de manera aleatoria de rojo o de azul. Ninguna de las matemáticas puede ver el color de su gorro ni el de la persona que está enfrente de ella en el corro (se la tapa el árbol), pero sí puede ver el color del gorro de las otras cuatro matemáticas. Si las matemáticas pueden elegir una estrategia conjuntamente de antemano, describe una estrategia que pueden seguir para maximizar la probabilidad de que todas ellas adivinen correctamente el color de su gorro en silencio, y calcula esa probabilidad.

Por ejemplo, si siguieran la estrategia de adivinar aleatoriamente, tendrían una probabilidad de $\frac{1}{2^6}$ de acertar todas. Sin embargo, si siguieran la estrategia de decir el mismo color del gorro de la matemática que está dos puestos a la derecha, acertarían si todas tuvieran el gorro rojo, todas azules, o los gorros fueran alternando entre azul y rojo en el círculo, es decir, acertarían en 4 ocasiones de 2^6 posibles. Por tanto, la probabilidad de acertar todas con esta estrategia es $\frac{4}{2^6} = \frac{1}{16}$, y esto es mejor que adivinar aleatoriamente.

Problema 33. Demuestra que no pueden existir tres números primos p, q, r tales que $2 < p < q < r$ y tales que $\frac{r-q}{p}$ y $\frac{r-p}{q}$ son números enteros que son cuadrados perfectos.

Problema 34. Érase una vez un rey indio que había nacido el día 5 del séptimo mes. Cuando se coronó, mandó retirar todas las monedas antiguas y sustituirlas por dos tipos de monedas nuevas, uno de 5 rupias y el otro, de 7 rupias. Decretó también que prohibía todos los precios que no se pudieran pagar con monedas de 5 y 7 (tampoco permitía dar el cambio), de modo que nada en su reino podía costar 1, 2, 3, 4, 6, 8 rupias pero sí permitía que la mercancía costase 5, 7, 10 o 12 rupias. ¿Había más precios permitidos o prohibidos durante su reinado? ¿Serías capaz de nombrar 15 precios prohibidos y 15 permitidos?

Segunda parte: supongamos que el rey nació el día 30. ¿En qué mes pudo haber nacido para que en su reinado hubiera una cantidad infinita de precios prohibidos?

Problema 35. Demuestra que existe un conjunto S de números enteros tales que todo número entero n se puede expresar de una manera única como $n = 20x + 23y$ para un par de números x, y en S.