PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fecha: 1, 8 y 15 de marzo de 2024 **Grupos Marte y Neptuno**

Aritmética

Recomendamos hacer los ejercicios de esta hoja **en orden hasta el Problema 12, leyendo las explicaciones teóricas y los ejemplos resueltos con cuidado**. Los Problemas 22–28 son más difíciles, así que recomendamos intentarlos después de resolver los Problemas 13–21.

Criterios de divisibilidad

Seguramente te acuerdes de los **criterios de división entre 3 y entre 9**: si la suma de las cifras de un número es múltiplo de 3 (o de 9), el propio número es múltiplo de 3 (o de 9). **Podrás saber por qué esto es verdad si haces el Problema 21** más adelante (leyendo y entendiendo el ejemplo resuelto que va justo antes de él).

Para que un número sea **múltiplo de 2** basta con que la última cifra sea múltiplo de 2. Aunque lo sabes desde la infancia, es importante que pienses por qué ocurre. La "culpa" la tiene nuestro sistema decimal: cualquier número se puede representar como suma de potencias de 10 multiplicadas por algo + las unidades. Cada potencia de 10 es par (en el ejemplo van en azul), por tanto para obtener un número par necesitamos que la cifra de las unidades (que va en rojo) también lo sea:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

El **criterio de divisibilidad entre 5** también proviene del sistema decimal: ya que 10 es múltiplo de 5, todas las potencias de 10 lo son. Para que nuestro número n sea múltiplo de 5 la cifra de las unidades también debe serlo.

Existe también el **criterio de divisibilidad entre 11**: suma las cifras que ocupan posiciones pares y réstale la suma de las cifras que ocupan posiciones impares. Si el resultado es múltiplo de 11, el número original también es múltiplo de 11. **Podrás saber por qué esto es verdad si haces el Problema 28** más adelante.

Ejemplo resuelto. Considera el número 8052. En las posiciones pares tenemos $0+2 = 2$. En las impares, $8 + 5 = 13$. Su resta $2 - 13 = -11$ es múltiplo de 11, por lo que 8052 también lo es.

Problema 1. En la palabra BRUNETE cada letra representa una de las siguientes cifras: 1, 3, 5, 6, 7 y 9, distintas letras corresponden a cifras distintas. El número correspondiente es múltiplo de 3. ¿Qué cifra representa la E ?

Solución. En BRUNET hay 6 letras distintas, que deben corresponder a las 6 cifras distintas, de modo que la suma de las cifras que corresponden a las letras es $B+R+U+N+E+T = 1+3+5+6+7+9 = 31$ (aunque en otro orden). Ahora tenemos que sumarle una de estas cifras para obtener un múltiplo de 3, la única opción es sumarle 5 ($31 + 5 = 3 \cdot 12$). Como la E es la única letra que se repite su valor es 5. De paso hemos demostrado que este número es múltiplo de 15 ¡sin saber cuál es! □

Problema 2. Hemos multiplicado todos los números impares del 11 al 99. ¿En qué cifra termina el resultado?

Pista. Empieza a multiplicar los primeros números fijándote sólo en la última cifra. ¿Observas algo?

Solución. El tercer número del producto es $15 = 5 \cdot 3$, de modo que el producto final es múltiplo de 5 también, además es impar. La última cifra es el 5. □

Problema 3. Formula criterios de divisibilidad entre 4 y entre 25.

Pista. Todas las potencias de 10 a partir de la segunda son múltiplos de 4 y de 25.

Solución. Como todas las potencias de 10 a partir de la segunda son múltiplos de 4 y de 25, para que nuestro número sea múltiplo de 4 (o de 25) las dos últimas cifras juntas (como un único número) deben ser múltiplos de 4 (o de 25). □

Problema 4. Halla el mayor múltiplo de 8 posible en el que todas las cifras sean distintas

Pista. ¿Cuántas cifras hay? ¿Cuántas cifras debe tener nuestro número? ¿En qué orden?

Pista 2. ¿Recuerdas el criterio de divisibilidad entre 4? Piensa en las 3 últimas cifras.

Solución. Para empezar, nos fijamos en que nuestro número no puede tener más de 10 cifras, si no, habría que repetir alguna. Para que sea el mayor número posible el orden de las cifras tiene que ser de mayor a menor (9876...). El único problema son las 3 últimas cifras: para que sea múltiplo de 8, ellas también tienen que serlo. Entre las 6 combinaciones de 0, 1, 2 el único múltiplo de 8 es el 120, por lo que nuestro número es 9876543120. □

Divisibilidad

¿Qué nos aporta más información, saber que 25 se descompone en suma de, pongamos, $17 + 8$, o saber que es producto de $5 \cdot 5$?

Aunque podamos descomponer 25 de muchas maneras en suma de dos sumandos, estas descomposiciones no nos dicen nada acerca de la estructura del propio número 25. Podemos hacer prácticamente las mismas descomposiciones para sus vecinos $23, 24, 26, 27$, sin embargo, estos números se comportan de una manera distinta.

La descomposición en factores, en cambio, nos dice mucho sobre el número y nos ayuda en la solución de problemas. Sabiendo que $25 = 5 \cdot 5$ vemos que la estructura del número es muy sencilla, tiene pocos divisores. Sabemos que sumar $\frac{1}{25} + \frac{1}{5}$ nos resultará sencillo a diferencia de una suma visiblemente parecida como $\frac{1}{25} + \frac{1}{6}$. 24, el vecino del 25, es mucho más rico en divisores, en cambio, 23 no tiene divisores distintos del 1 y de sí mismo, por eso ¡será tremendamente complicado dividir una tarta de cumpleaños en 23 trozos iguales!

Definición 1. Los números que tienen exactamente 2 divisores se llaman **primos**.
Los números que tienen más de 2 divisores se llaman **compuestos**.
El número 1 no es ni primo ni compuesto, se llama **unidad**.
Los números que no tienen divisores comunes además del 1 se llaman **coprimos**.

Problema 5.
1. Busca 5 números compuestos seguidos
2. Busca 7 números compuestos seguidos
3. (Más difícil) Demuestra que se puede encontrar una serie de números compuestos seguidos de cualquier longitud n

Solución.
1. Por ejemplo, $24, 25, 26, 27, 28$
2. Por ejemplo, $90, 91, 92, 93, 94, 95, 96$
3. Considera $A = (n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1)$. Está claro que $2|(A+2)$, $3|(A+3)$, ..., $n+1|(A+n+1)$, por lo que todos estos números serán compuestos.

□

Problema 6. Demuestra que los siguientes números son compuestos y busca al menos 3 factores.
Pista: Recuerda que $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

1. $10^{128} - 1$

2. 999 991

Solución.

1. $10^{128} - 1 = (10^{64} - 1)(10^{64} + 1) = (10^{32} - 1)(10^{32} + 1)(10^{64} + 1) = ...$

2. $999991 = 10^6 - 9 = (1000 - 3)(1000 + 3) = 997 \cdot 17 \cdot 59$

□

¿Qué significa que un número N sea múltiplo de 3? Matemáticamente hablando, significa que N **se puede representar como producto de 3 por un número entero**, es decir

$$N = 3k, \quad \text{donde } k \text{ es un número entero.}$$

Por ejemplo, -12 es múltiplo de 3 porque $-12 = 3 \cdot (-4)$, donde -4 es entero, sin embargo, 7 no es múltiplo de 3 porque $7 = 3 \cdot \frac{7}{3}$, y $\frac{7}{3}$ no es entero.

Parece mentira, pero esta notación nos permite demostrar hechos sobre números que ni siquiera sabemos cuáles son.

Ejemplo resuelto. Vamos a demostrar que todos los múltiplos de 6 también son múltiplos de 3. Si $N = 6k$ es múltiplo de 6, entonces se puede representar como producto de 6 por un número entero k. Pero $6 = 3 \cdot 2$. Por eso

$$N = 3 \cdot 2 \cdot k = 3 \cdot (2 \cdot k), \quad \text{donde } 2k \text{ es un número entero.}$$

Es decir, N es el producto de 3 por un entero y por tanto es múltiplo de 3.

Problema 7. Repite el razonamiento del ejemplo resuelto anterior para demostrar el siguiente resultado: Si N, a, b son números enteros tales que N es múltiplo de a y a es múltiplo de b, entonces N es múltiplo de b.

Solución. Sabemos que $N = ka$ para algún número entero k, y que $a = lb$ para algún número entero l. Por tanto, $N = klb$ (producto de b por el entero kl). □

Para no escribir muchas veces que k es un número entero, en las matemáticas existe un convenio tácito: se "reservan" las letras k, l, m, n para designar números enteros. Ahora daremos una definición formal:

Definición 2. Se dice que el número a es **múltiplo** de b si existe un número entero k tal que $a = kb$. En este caso se escribe también $b|a$ ("be" **divide** "a"). El número b se llama **divisor** de a.

Problema 8. ¿Cuántos divisores tienen estos números?

1. $13 \cdot 17$

2. 13^2

3. $13 \cdot 17 \cdot 19$

4. $13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

5. 13^{19}?

Solución.

1. $4 : 1, 13, 17, 13 \cdot 17$

2. $3 : 1, 13, 13^2$

3. 8
4. 16. Elijamos un divisor d del número $13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$. Cada uno de los primos $13, 17, 19, 23$ o aparece en el divisor d o no aparece. En total tenemos 16 opciones. Para entenderlo mejor, hagamos una tabla

13	17	19	23	divisor
NO	NO	NO	NO	1
SÍ	NO	NO	NO	13
NO	SÍ	NO	NO	17
SÍ	SÍ	NO	NO	$13 \cdot 17$
...				
SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	$13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

5. 20. Son todas las potencias de 13 de 0 a 19.

□

Problema 9. ¿Es verdad que la suma de tres números consecutivos siempre es múltiplo de 3?

Solución. Sí, es verdad.

$$n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$$

□

Problema 10. –¿Qué pasa, Ana? Te veo preocupada.

–Es que creo que no nos cobraron bien la comida.

– ¿Cuánto os costó?

– Éramos cuatro, y recuerdo que los cuatro platos que consumimos tenían unos precios enteros consecutivos, en plan, 16, 17, 18 y 19… ¡Pero no recuerdo en absoluto cuánto era!

– ¿Y cuánto pagasteis?

– Recuerdo que lo repartimos entre los 4 y todos pagamos la misma cantidad, también entera.

¿Puedes ayudar a Ana a determinar si les cobraron bien?

Pista. De las 4 cantidades que tenían que pagar, llama n la menor

Solución. Llamemos n la menor cantidad que tenían que pagar. Entonces otras tres cantidades son $n + 1, n + 2, n + 3$. Si sumamos estas cuatro cantidades nos da

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 4\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

Como $n + \frac{3}{2}$ no es un número entero si n es un número entero, la suma no es múltiplo de 4, por lo que NO les cobraron bien. □

Problema 11. Un número está compuesto por dos grupos iguales de 3 cifras (como 167167 o 335335). Demuestra que es múltiplo de $7, 11$ y 13.

Solución. Cualquier número que tenga el aspecto de $abcabc$ se puede representar como $abc \times 1001$. A su turno, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, por lo que $abcabc = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ también será su múltiplo □

Problema 12. ¿Es verdad que el producto de tres números enteros consecutivos siempre es múltiplo de 6?

Solución. Sí. De tres números consecutivos al menos uno es múltiplo de 3 y al menos uno es par. □

Problema 13. ¿Es verdad que $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot ... \cdot 101 - 6$ es múltiplo de 5?

Pista. ¿Cuál es la última cifra del producto?

Solución. El producto de dos números que terminan en 1 también termina en 1. Como la última cifra del producto es 1, si le restamos 6, terminará en 5 y, por tanto, será múltiplo de 5. ☐

Problema 14. Se sabe que

$$35! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 35 = 10333147966386144929 * 66651337523200000000.$$

¿Qué cifra está sustituida por el asterisco?

Pista. 35! es múltiplo de 9

Solución. Como 35! es múltiplo de 9, sus cifras deben sumar un múltiplo de 9. Por esto, la cifra escondida es el 6. ☐

Problema 15. En un número han cambiado de orden las cifras. El resultado ha sido el triple del número inicial. Demuestra que este nuevo número es múltiplo de 27.

Pista. Piensa cuánto suman las cifras del nuevo número y vuelve al número original

Pista 2. Demuestra que el nuevo número es múltiplo de 3, luego que es múltiplo de 9 y por último, que es múltiplo de 27

Solución. Llamamos n al nuevo número y v (de viejo) al número inidial. El nuevo número es múltiplo de 3 (ya que es el triple del original). Por eso sus cifras suman un múltiplo de 3. Pero las cifras del número original son las mismas y deben sumar lo mismo, por lo que el número original es múltiplo de 3, es decir, $v = 3k$. Pero el nuevo número, al ser el triple del original, ¡es múltiplo de 9! $n = 3v = 3 \cdot 3k = 9k$. Entonces sus cifras suman un múltiplo de 9, pero entonces las cifras del número original también suman un múltiplo de 9 y el número original en sí es múltiplo de 9, $v = 9m$. Entonces, el nuevo número, al ser el triple, es múltiplo de 27. ☐

Problema 16. ¿Es verdad que

1. si $c|a$, entonces $c|ab$?
2. si $c|ab$, entonces $c|a$ o $c|b$?

Solución.

1. Es cierto. $c|a \Leftrightarrow a = kc, \Rightarrow ab = kbc = c \cdot (kb)$ es múltiplo de c.
2. Es cierto para c primos (aunque no lo hemos demostrado), pero no en general. $6|(3{\cdot}8)$, pero $6 \nmid 3, 6 \nmid 8$.

☐

Problema 17. Dos jugadores A y B van retirando por turnos 1, 2 3 o 4 piedras de un montón de 17. El jugador que retira la(s) última(s) gana. ¿Quién gana si ambos jugadores juegan bien? ¿Cuál es la estrategia?

Pista. Claramente, dejar a tu rival con 5 piedras significa ganar. Busca otra posición ganadora.

Solución. Las posiciones ganadoras en este juego son múltiplos de 5. Por tanto, gana A retirando inicialmente 2 piedras y luego completando la jugada del adversario para que sumen 5 piedras. Siempre puede hacerlo porque si B retira $1 \leqslant k \leqslant 4$ piedras, entonces $1 \leqslant 5 - k \leqslant 4$. ☐

Problema 18. Andrés ha multiplicado un número de dos cifras por otro y el resultado tenía 4 cifras. Lo ha escrito como

$$AB \times CD = EEFF$$

donde distintas cifras corresponden a distintas letras y viceversa. Demuestra que ha cometido un error.

Pista. Acuérdate del criterio de divisibilidad entre 11

Solución. El número $EEFF$ satisface el criterio de divisibilidad entre 11 ya que $(E+F)-(E+F)=0$ y 0 es múltiplo de 11. Pero ninguno de los números originales lo es. □

Problema 19. Coloca los números del 0 al 15 en las casillas del cuadrado 4×4 para que el producto de los números de cada fila y el de cada columna sean múltiplos de 9. ¿Serás capaz de hacer lo mismo con los números del 1 al 16?

Pista. Piensa solamente en los múltiplos de 3. $9 = 3 \times 3$

Solución. Necesitamos que en cada fila y columna haya o bien un múltiplo de 9 o bien dos múltiplos de 3 (su producto será múltiplo de 9). En total, tenemos dos múltiplos de 9 (0 *y* 9 y cuatro múltiplos de 3 $(3, 6, 12, 15)$. Coloquemos los múltiplos de 9 de modo que nos "cubran" una fila y una columna cada uno, y los restantes 4 números se encargarán de cumplir la condición en las dos restantes filas y columnas. Una de las posibles colocaciones está en la siguiente tabla:

0			
	9		
		3	6
		12	15

Los demás números no importan, pueden ser colocados de cualquier manera.

La segunda parte del problema, sin embargo, es imposible, ya que no tenemos suficientes múltiplos de 9. □

Problema 20. Recuerda que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$. ¿Cuántos ceros hay al final de

1. 20!
2. 100!
3. 200!

Pista. Cada 0 al final es producto de un 10, y cada 10 es producto de un 5 y un 2. Cuéntalos.

Solución.
1. Entre los números del 1 al 20 hay cuatro múltiplos de 5 y muchos más múltiplos de 2. Por tanto habrá 4 ceros.
2. Entre los números del 1 al 100 hay 20 múltiplos de 5 y muchos más múltiplos de 2. Pero, además, ¡hay 4 múltiplos de 25 (25, 50, 75 y 100), y cada uno de ellos aporta un 5 adicional. En total habrá 24 ceros.
3. Aquí, además de contar los 40 múltiplos de 5 y los 8 múltiplos de 25 hay que fijarse en que hay un múltiplo de 125, que aporta ¡tres cincos! En total habrá 49 ceros.

□

Antes de hacer el Problema 21, lee y entiende el siguiente ejemplo resuelto.

Ejemplo resuelto (Criterio de divisibilidad por 3)**.** Demuestra que un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es divisible por 3.

Solución. Sea n un número natural. Lo expresamos en base 10 como $n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots$, es decir, r_0 es la cifra de las unidades, r_1 la de las decenas, r_2 la de las centenas, etc. Tenemos que $10 = 9+1$, $10^2 = 99+1$, $10^3 = 999+1$, $\ldots$. Por tanto,

$$n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots = (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) + (r_1 \cdot 9 + r_2 \cdot 99 + \ldots).$$

Observamos que $r_1 \cdot 9 + r_2 \cdot 99 + \ldots = 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots)$ es divisible por 3. En resumen, sabemos que

$$n = (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) + 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots) \tag{1}$$

Nos piden demostrar que n es divisible por 3 en las mismas ocasiones en las que $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$ es divisible por 3. Hacemos esta demostración en dos pasos. Primero veremos que si n es divisible por 3, entonces también lo es $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$. Luego veremos que si $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$ es divisible por 3, también lo es n.

Si n es divisible por 3, entonces $n = 3k$ para algún número entero k. Por la ecuación (1), obtenemos que

$$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots = 3k - 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots) = 3(k - (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots)),$$

por lo que la suma de las cifras de n también será divisible por 3.

Ahora, supongamos que $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$ es divisible por 3. Entonces, $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) = 3m$ para algún número entero m. Por la ecuación (1), obtenemos que

$$n = 3m + 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots) = 3(m + (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots)),$$

por lo que n también será divisible por 3. □

Problema 21 (Criterio de divisibilidad por 9)**.** Demuestra que un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es divisible por 9.

Solución. Sea $n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots$ un numero natural expresado en base 10 como en el ejemplo resuelto anterior. Como antes, tenemos que

$$n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots = (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) + (r_1 \cdot 9 + r_2 \cdot 99 + \ldots) = (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) + 9(r_1 + r_2 \cdot 11 + r_3 \cdot 111 + \ldots).$$

Argumentando como en el ejemplo anterior obtendremos que n es divisible por 9 en las mismas ocasiones en las que $r_0 + r_1 + r_2 + \ldots$ es divisible por 9. □

¿Te atreves con estos problemas más complicados?

Problema 22. EL RITUAL MÁGICO.

Para salir de una fábrica secreta hay que atravesar un pasillo secreto que tiene 25 interruptores.

El primero en salir enciende todos los interruptores.

El segundo apaga el 2º, el 4º, el 6º y los demás impares.

El tercero cambia de estado el 3º, el 6º, el 9º... y demás múltiplos de 3 (es decir, si estaba apagado, lo enciende y al revés).

El cuarto cambia de estado los múltiplos de 4, y así hasta el trabajador 25, que solamente cambiará de estado el último interruptor.

¿Qué interruptores quedarán encendidos al final?

Pista. Para que un interruptor quede encendido es imprescindible que lo hayan cambiado de estado un número impar de veces. ¿Qué números tienen una cantidad impar de divisores?

Solución. Para que un interruptor quede encendido es imprescindible que lo hayan cambiado de estado un número impar de veces. Por tanto, debemos averiguar qué números tienen una cantidad impar de divisores.

Todos los divisores forman parejas, ya que si $d|N$ es un divisor, entonces $\frac{N}{d}|N$ también lo es. Por ejemplo, la pareja de $2|24$ es $12|24$. Para que haya una cantidad impar de divisores, un divisor tiene que formar pareja consigo mismo, es decir, $d = \frac{N}{d}$, por lo que $N = d^2$.

Quedarán encendidos los cuadrados perfectos: $1, 4, 9, 16, 25$. □

Problema 23. ¿Cuándo es la suma de N números consecutivos un múltiplo de N?

Pista. Para N impares, llama k al número del medio. Para los pares, elige cualquiera de los dos números del medio.

Solución. La respuesta es SÍ para N impares y NO para pares.

Llamemos k el número del medio. Si $N = 2M + 1$ es impar, la suma de estos N números será

$$S = (k - M) + ... + (k - 2) + (k - 1) + k + (k + 1) + (k + 2) + ... + (k + M) = Nk$$

Ahora supongamos que $N = 2M + 2$ es par. Está claro que si añadimos a esta suma el último término $S' = S + k + M + 1 = Nk + M + 1$ dejará de ser múltiplo de N $\square$

Problema 24. Sea p primo mayor de 3. Demuestra que $24|(p^2 - 1)$.

Solución. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, es producto de dos pares consecutivos (ya que el propio p es impar). Entre ellos hay al menos un múltiplo de 4, por lo que este producto es múltiplo de 8. Por otro lado, entre tres números consecutivos $p-1, p, p+1$ hay al menos un múltiplo de 3, y no puede ser p (porque es primo mayor de 3). Por tanto, el producto es múltiplo de $3 \cdot 8 = 24$. $\square$

Problema 25. Halla todos los enteros positivos n tales que $(n + 1)|(5n + 17)$

Solución. Supongamos que $(n + 1)|(5n + 17)$. También sabemos que $(n + 1)|5(n + 1)$, por tanto, $(n + 1)|(5n + 17 - 5n - 5)$, $(n + 1)|12$, de modo que $n + 1$ debe ser uno de los divisores de 12. Conclusión: $n \in \{1, 2, 3, 5, 11\}$ $\square$

Problema 26. Encuentra todos los números de dos cifras cuyo cuadrado termina en esas mismas dos cifras.

Pista. Si restas el número original de su cuadrado obtendrás un múltiplo de 100

Solución. Sea el número original a sabemos que $a^2 - a = (a - 1)a = k \cdot 100$ para algún entero k. Por tanto, $a - 1$ y a tienen que contener los divisores del 100, dos doses y dos cincos. Además, los números $a-1, a$ son coprimos (no tienen divisores comunes), por lo que uno debe ser múltiplo de 25 y el otro, de 4. Múltiplos de 25 menores de 100 sólo hay 3, si $a - 1 = 25$, $4 \nmid a = 26$, si $a = 25$, $4|a - 1$ y ya tenemos una solución, si $a = 50, 4 \nmid a - 1$, si $a - 1 = 50, 4 \nmid a$ y, por último si $a = 75, 4 \nmid a - 1$ pero si $a - 1 = 75, 4|a$, lo que nos da la segunda solución. Respuesta: $a = 25$ o $a = 76$ $\square$

Problema 27. Un número de 2025 cifras es múltiplo de 27. Lo escribimos en círculo y lo rotamos varias posiciones. Demuestra que este nuevo número de 2025 cifras también es múltiplo de 27.

Solución. Basta demostrar que si colocamos la última cifra al principio el nuevo número será también múltiplo de 27 (para el caso general aplicaremos este procedimiento las veces que haga falta).

Sea el número original $N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + ... + 10^{2024}a_{2024}$. Sea $M = a_1 + 10^1a_2 + ... + 10^{2023}a_{2024}$, entonces $27|N = a_0 + 10M$. Queremos demostrar que $27|M + 10^{2024}a_0$. Restemos estos dos números, si la resta es múltiplo de 27, lo hemos conseguido:

$$R = (M + 10^{2024}a_0) - (a_0 + 10M) = a_0(10^{2024} - 1) - 9M$$

$$10R = a_0(10^{2025} - 10) - 90M = a_0(10^{2025} - 1) - 9(a_0 + 10M) = a_0(10^{2025} - 1) - 9N$$

Ahora bien, en esta última resta $27|10^{2025} - 1$ (porque son 2025 nueves) y $27|9N$. $\square$

Problema 28. Demuestra el criterio de divisibilidad por 11. Este criterio está enunciado en la primera página de esta hoja.
Ayuda: Empieza demostrando que $10^k - 1$ es divisible por 11 si k es par y $10^k + 1$ es divisible por 11 si k es impar.

Solución. Empezamos demostrando la ayuda. Si k es par, entonces $k = 2m$ para algún número entero $m \geq 0$. El resultado es obvio si $m = 0$, por lo que podemos asumir que $m \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
10^k - 1 &= \underbrace{99\ldots99}_{2m \text{ veces}} \\
&= 99 \cdot 1 + 99 \cdot 10^2 + 99 \cdot 10^4 + \ldots + 99 \cdot 10^{2m-2} \\
&= 99 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2}) \\
&= 11 \cdot 9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2}),
\end{aligned}$$

y como $9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2})$ es un número entero, $10^k - 1$ es divisible por 11 si k es par.

Si k es impar, entonces $k = 2m + 1$ para algún entero $m \geq 0$. El resultado es obvio si $m = 0$, por lo que podemos asumir que $m \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 10^k + 1 &= \underbrace{99\ldots9}_{2m \text{ veces}}0 + 11 \\ &= 11 + 10 \cdot (10^{2m} - 1) \\ &= 11 \cdot (1 + 10 \cdot 9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2})), \end{aligned}$$

y como $(1 + 10 \cdot 9 \cdot (1 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2m-2}))$ es un número entero, obtenemos que $10^k + 1$ es divisible por 11 si k es impar. Con esto, queda demostrada la ayuda.

Pasamos ahora a demostrar el problema. Sea $n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots$ un número natural n escrito en base 10, es decir, r_0 es la cifra de las unidades, r_1 la de las decenas, etc. Tenemos que

$$n = (r_0 - r_1 + r_2 - \ldots) + (r_1 \cdot (10 + 1) + r_2 \cdot (10^2 - 1) + r_3 \cdot (10^3 + 1) \ldots).$$

La ayuda nos dice que $(10 + 1), (10^2 - 1), (10^3 + 1), \ldots$ son todos divisibles por 11, por lo que

$$(r_1 \cdot (10 + 1) + r_2 \cdot (10^2 - 1) + r_3 \cdot (10^3 + 1) \ldots) \quad \text{es divisible por 11.}$$

Argumentando como en el criterio de divisibilidad por 3 (el ejemplo resuelto antes del Problema 21), obtenemos que n es divisible por 11 si y sólo si $(r_0 - r_1 + r_2 - \ldots)$ es divisible por 11. $\square$