PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fecha: 1, 8 y 15 de marzo de 2024 **Grupos Marte y Neptuno**

Aritmética

Recomendamos hacer los ejercicios de esta hoja **en orden hasta el Problema 12, leyendo las explicaciones teóricas y los ejemplos resueltos con cuidado**. Los Problemas 22–28 son más difíciles, así que recomendamos intentarlos después de resolver los Problemas 13–21.

Criterios de divisibilidad

Seguramente te acuerdes de los **criterios de división entre 3 y entre 9**: si la suma de las cifras de un número es múltiplo de 3 (o de 9), el propio número es múltiplo de 3 (o de 9). **Podrás saber por qué esto es verdad si haces el Problema 21** más adelante (leyendo y entendiendo el ejemplo resuelto que va justo antes de él).

Para que un número sea **múltiplo de 2** basta con que la última cifra sea múltiplo de 2. Aunque lo sabes desde la infancia, es importante que pienses por qué ocurre. La "culpa" la tiene nuestro sistema decimal: cualquier número se puede representar como suma de potencias de 10 multiplicadas por algo + las unidades. Cada potencia de 10 es par (en el ejemplo van en azul), por tanto para obtener un número par necesitamos que la cifra de las unidades (que va en rojo) también lo sea:

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$$

El **criterio de divisibilidad entre 5** también proviene del sistema decimal: ya que 10 es múltiplo de 5, todas las potencias de 10 lo son. Para que nuestro número n sea múltiplo de 5 la cifra de las unidades también debe serlo.

Existe también el **criterio de divisibilidad entre 11**: suma las cifras que ocupan posiciones pares y réstale la suma de las cifras que ocupan posiciones impares. Si el resultado es múltiplo de 11, el número original también es múltiplo de 11. **Podrás saber por qué esto es verdad si haces el Problema 28** más adelante.

Ejemplo resuelto. Considera el número 8052. En las posiciones pares tenemos $0+2=2$. En las impares, $8+5=13$. Su resta $2-13=-11$ es múltiplo de 11, por lo que 8052 también lo es.

Problema 1. En la palabra BRUNETE cada letra representa una de las siguientes cifras: 1, 3, 5, 6, 7 y 9, distintas letras corresponden a cifras distintas. El número correspondiente es múltiplo de 3. ¿Qué cifra representa la E ?

Problema 2. Hemos multiplicado todos los números impares del 11 al 99. ¿En qué cifra termina el resultado?

Problema 3. Formula criterios de divisibilidad entre 4 y entre 25.

Problema 4. Halla el mayor múltiplo de 8 posible en el que todas las cifras sean distintas

Divisibilidad

¿Qué nos aporta más información, saber que 25 se descompone en suma de, pongamos, $17+8$, o saber que es producto de $5 \cdot 5$?

Aunque podamos descomponer 25 de muchas maneras en suma de dos sumandos, estas descomposiciones no nos dicen nada acerca de la estructura del propio número 25. Podemos hacer prácticamente las mismas descomposiciones para sus vecinos $23, 24, 26, 27$, sin embargo, estos números se comportan de una manera distinta.

La descomposición en factores, en cambio, nos dice mucho sobre el número y nos ayuda en la solución de problemas. Sabiendo que $25 = 5 \cdot 5$ vemos que la estructura del número es muy sencilla, tiene pocos divisores. Sabemos que sumar $\frac{1}{25} + \frac{1}{5}$ nos resultará sencillo a diferencia de una suma visiblemente parecida como $\frac{1}{25} + \frac{1}{6}$. 24, el vecino del 25, es mucho más rico en divisores, en cambio, 23 no tiene divisores distintos del 1 y de sí mismo, por eso ¡será tremendamente complicado dividir una tarta de cumpleaños en 23 trozos iguales!

Definición 1. Los números que tienen exactamente 2 divisores se llaman **primos**.
Los números que tienen más de 2 divisores se llaman **compuestos**.
El número 1 no es ni primo ni compuesto, se llama **unidad**.
Los números que no tienen divisores comunes además del 1 se llaman **coprimos**.

Problema 5.

1. Busca 5 números compuestos seguidos
2. Busca 7 números compuestos seguidos
3. (Más difícil) Demuestra que se puede encontrar una serie de números compuestos seguidos de cualquier longitud n

Problema 6. Demuestra que los siguientes números son compuestos y busca al menos 3 factores.
Pista: Recuerda que $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

1. $10^{128} - 1$
2. 999 991

¿Qué significa que un número N sea múltiplo de 3? Matemáticamente hablando, significa que N **se puede representar como producto de 3 por un número entero**, es decir

$$N = 3k, \quad \text{donde } k \text{ es un número entero.}$$

Por ejemplo, -12 es múltiplo de 3 porque $-12 = 3 \cdot (-4)$, donde -4 es entero, sin embargo, 7 no es múltiplo de 3 porque $7 = 3 \cdot \frac{7}{3}$, y $\frac{7}{3}$ no es entero.

Parece mentira, pero esta notación nos permite demostrar hechos sobre números que ni siquiera sabemos cuáles son.

Ejemplo resuelto. Vamos a demostrar que todos los múltiplos de 6 también son múltiplos de 3. Si $N = 6k$ es múltiplo de 6, entonces se puede representar como producto de 6 por un número entero k. Pero $6 = 3 \cdot 2$. Por eso

$$N = 3 \cdot 2 \cdot k = 3 \cdot (2 \cdot k), \quad \text{donde } 2k \text{ es un número entero.}$$

Es decir, N es el producto de 3 por un entero y por tanto es múltiplo de 3.

Problema 7. Repite el razonamiento del ejemplo resuelto anterior para demostrar el siguiente resultado: Si N, a, b son números enteros tales que N es múltiplo de a y a es múltiplo de b, entonces N es múltiplo de b.

Para no escribir muchas veces que k es un número entero, en las matemáticas existe un convenio tácito: se "reservan" las letras k, l, m, n para designar números enteros. Ahora daremos una definición formal:

Definición 2. Se dice que el número a es **múltiplo** de b si existe un número entero k tal que $a = kb$. En este caso se escribe también $b|a$ ("be" **divide** "a"). El número b se llama **divisor** de a.

Problema 8. ¿Cuántos divisores tienen estos números?

1. $13 \cdot 17$
2. 13^2
3. $13 \cdot 17 \cdot 19$
4. $13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
5. 13^{19}?

Problema 9. ¿Es verdad que la suma de tres números consecutivos siempre es múltiplo de 3?

Problema 10. –¿Qué pasa, Ana? Te veo preocupada.
–Es que creo que no nos cobraron bien la comida.
– ¿Cuánto os costó?
– Éramos cuatro, y recuerdo que los cuatro platos que consumimos tenían unos precios enteros consecutivos, en plan, 16, 17, 18 y 19... ¡Pero no recuerdo en absoluto cuánto era!
– ¿Y cuánto pagasteis?
– Recuerdo que lo repartimos entre los 4 y todos pagamos la misma cantidad, también entera.
¿Puedes ayudar a Ana a determinar si les cobraron bien?

Problema 11. Un número está compuesto por dos grupos iguales de 3 cifras (como 167167 o 335335). Demuestra que es múltiplo de $7, 11$ y 13.

Problema 12. ¿Es verdad que el producto de tres números enteros consecutivos siempre es múltiplo de 6?

Problema 13. ¿Es verdad que $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot ... \cdot 101 - 6$ es múltiplo de 5?

Problema 14. Se sabe que

$$35! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 35 = 10333147966386144929 * 66651337523200000000.$$

¿Qué cifra está sustituida por el asterisco?

Problema 15. En un número han cambiado de orden las cifras. El resultado ha sido el triple del número inicial. Demuestra que este nuevo número es múltiplo de 27.

Problema 16. ¿Es verdad que

1. si $c|a$, entonces $c|ab$?
2. si $c|ab$, entonces $c|a$ *o* $c|b$?

Problema 17. Dos jugadores A y B van retirando por turnos 1, 2 3 o 4 piedras de un montón de 17. El jugador que retira la(s) última(s) gana. ¿Quién gana si ambos jugadores juegan bien? ¿Cuál es la estrategia?

Problema 18. Andrés ha multiplicado un número de dos cifras por otro y el resultado tenía 4 cifras. Lo ha escrito como

$$AB \times CD = EEFF$$

donde distintas cifras corresponden a distintas letras y viceversa. Demuestra que ha cometido un error.

Problema 19. Coloca los números del 0 al 15 en las casillas del cuadrado 4×4 para que el producto de los números de cada fila y el de cada columna sean múltiplos de 9. ¿Serás capaz de hacer lo mismo con los números del 1 al 16?

Problema 20. Recuerda que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$. ¿Cuántos ceros hay al final de

1. 20!
2. 100!
3. 200!

Antes de hacer el Problema 21, lee y entiende el siguiente ejemplo resuelto.

Ejemplo resuelto (Criterio de divisibilidad por 3)**.** Demuestra que un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es divisible por 3.

Solución. Sea n un número natural. Lo expresamos en base 10 como $n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots$, es decir, r_0 es la cifra de las unidades, r_1 la de las decenas, r_2 la de las centenas, etc. Tenemos que $10 = 9+1$, $10^2 = 99+1$, $10^3 = 999+1$, ... Por tanto,

$$n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots = (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) + (r_1 \cdot 9 + r_2 \cdot 99 + \ldots).$$

Observamos que $r_1 \cdot 9 + r_2 \cdot 99 + \ldots = 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots)$ es divisible por 3. En resumen, sabemos que

$$n = (r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) + 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots) \tag{1}$$

Nos piden demostrar que n es divisible por 3 en las mismas ocasiones en las que $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$ es divisible por 3. Hacemos esta demostración en dos pasos. Primero veremos que si n es divisible por 3, entonces también lo es $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$. Luego veremos que si $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$ es divisible por 3, también lo es n.

Si n es divisible por 3, entonces $n = 3k$ para algún número entero k. Por la ecuación (1), obtenemos que

$$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots = 3k - 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots) = 3(k - (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots)),$$

por lo que la suma de las cifras de n también será divisible por 3.

Ahora, supongamos que $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots)$ es divisible por 3. Entonces, $(r_0 + r_1 + r_2 + \ldots) = 3m$ para algún número entero m. Por la ecuación (1), obtenemos que

$$n = 3m + 3 \cdot (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots) = 3(m + (r_1 \cdot 3 + r_2 \cdot 33 + \ldots)),$$

por lo que n también será divisible por 3. □

Problema 21 (Criterio de divisibilidad por 9)**.** Demuestra que un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es divisible por 9.

¿Te atreves con estos problemas más complicados?

Problema 22. EL RITUAL MÁGICO.

Para salir de una fábrica secreta hay que atravesar un pasillo secreto que tiene 25 interruptores.

El primero en salir enciende todos los interruptores.

El segundo apaga el 2º, el 4º, el 6º y los demás impares.

El tercero cambia de estado el 3º, el 6º, el 9º... y demás múltiplos de 3 (es decir, si estaba apagado, lo enciende y al revés).

El cuarto cambia de estado los múltiplos de 4, y así hasta el trabajador 25, que solamente cambiará de estado el último interruptor.

¿Qué interruptores quedarán encendidos al final?

Problema 23. ¿Cuándo es la suma de N números consecutivos un múltiplo de N?

Problema 24. Sea p primo mayor de 3. Demuestra que $24|(p^2 - 1)$.

Problema 25. Halla todos los enteros positivos n tales que $(n + 1)|(5n + 17)$

Problema 26. Encuentra todos los números de dos cifras cuyo cuadrado termina en esas mismas dos cifras.

Problema 27. Un número de 2025 cifras es múltiplo de 27. Lo escribimos en círculo y lo rotamos varias posiciones. Demuestra que este nuevo número de 2025 cifras también es múltiplo de 27.

Problema 28. Demuestra el criterio de divisibilidad por 11. Este criterio está enunciado en la primera página de esta hoja.
Ayuda: Empieza demostrando que $10^k - 1$ es divisible por 11 si k es par y $10^k + 1$ es divisible por 11 si k es impar.