PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fecha: 2, 9 y 16 de febrero de 2024 **Hoja generica**

Hoja Variada

Problema 1. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel, y le preguntas a Agustina si es humana. Te contesta, pero no entiendes qué dice. Entonces le preguntas a Bob qué ha dicho Agustina, y te contesta "Ha dicho que es un elfo". Ciel dice "No hagas caso a Bob, está mintiendo". ¿Qué son Bob y Ciel?

Problema 2. Se elige un número al azar del 0 al 500 (ambos incluidos). Sin enumerar todos esos enteros, ¿cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 7 o por 11?

Problema 3. Sea $ABCDE$ un pentágono, y sea P el punto medio del segmento AB. Sabemos que la mediatriz del segmento AB contiene al vértice D, que el pentágono es simétrico con respecto a la recta PD, y que los segmentos AE y BC son paralelos. Si $|BC| = 6$, $|AB| = 14$ y $|DP| = 13$, ¿cuál es el área del pentágono?

Problema 4. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel, y le preguntas a Agustina cuántos humanos hay entre ellos. Te contesta, pero no entiendes qué dice. Entonces le preguntas a Bob qué ha dicho Agustina, y te contesta "Ha dicho que hay un humano entre nosotros". Ciel dice "No hagas caso a Bob, está mintiendo". ¿Qué son Bob y Ciel?

Problema 5. Hay 20 tarjetas, cada una con un número del 1 al 20 escrito en cada uno de sus lados. Si consideramos todos los números que aparecen en los dos lados de las 20 tarjetas, cada número del 1 al 20 aparece dos veces. Demuestra que las tarjetas se pueden organizar de manera que todos los números en la parte superior sean diferentes.

Problema 6. En un círculo matemático, cada miembro tiene exactamente un amigo y un enemigo (las relaciones de amistad y enemistad son simétricas). Demostrar que:

a) el número de miembros del círculo es par;

b) el círculo se puede dividir en dos grupos neutrales (tal que no hay amigos y enemigos entre miembros del mismo grupo).

Problema 7. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con un ser, que dice "Soy un elfo, o $2 + 2 = 5$". ¿Qué concluyes?

Problema 8. Tienes los ojos vendados y estás sentado frente a una mesa giratoria que tiene un interruptor en cada una de sus cuatro esquinas. El interruptor puede apuntar arriba o abajo. En cada turno puedes girar la mesa (pero no sabrás cuánto la has girado), estirarte hasta tocar dos de los interruptores (que estarán en esquinas seguidas u opuestas por la diagonal y esto lo sabrás según cuánto te hayas tenido que estirar), notar si están apuntando arriba o abajo, y cambiar la posición de uno de ellos, de los dos o de ninguno. Ganarás si acabas con todos los interruptores hacia arriba o todos hacia abajo (aunque tú no seas consciente de que lo están). Determina una estrategia con la que te puedas asegurar ganar siempre en un número finito de turnos, o demuestra que una estrategia así no puede existir.

Problema 9. Tenemos 40 piruletas para repartirlas entre 3 niños. ¿De cuántas maneras distintas podemos hacer esto (sin partir las piruletas) de manera que cada niño recibe más de una piruleta pero menos de 20?

Problema 10. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel. Agustina dice que todos ellos son elfos. Bob dice que exactamente uno de ellos es elfo. ¿Qué son? ¿Se puede saber?

Problema 11. Encuentra el número primo más pequeño tal que la suma de sus dígitos es n, o demuestra que tal número primo no existe, si n es:

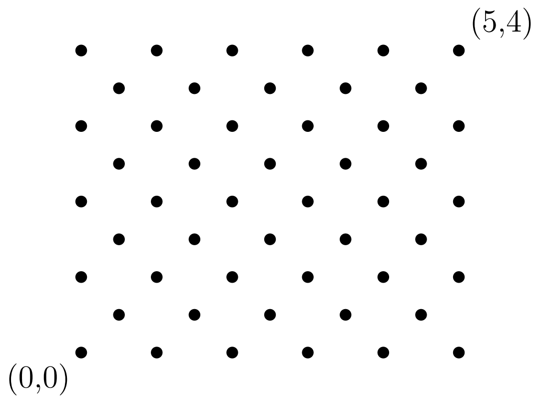
a) 13.

b) 14.

c) 15.

Problema 12. En un país hay 15 ciudades, algunas de las cuales están conectadas por líneas aéreas operadas por tres aerolíneas. Se sabe que incluso si cualquiera de las aerolíneas deja de operar, aún se puede llegar desde cada ciudad a cualquier otra (quizás con escalas) utilizando los vuelos de las dos aerolíneas restantes. ¿Cuál es el menor número posible de líneas aéreas que puede haber en el país?

Problema 13. Para cada par de enteros $m \geq n \geq 1$, llamamos $F_{m,n}$ al conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq m$, $0 \leq y \leq n$ y tal que $2x$, $2y$ y $x + y$ son todos números enteros. Por ejemplo, $F_{5,4}$ tiene 50 puntos, colocados como las estrellas en la bandera de Estados Unidos de América:



a) Encuentra el número de puntos de $F_{m,n}$ en términos de m y n.

b) Encuentra todos los pares (m, n) para los cuales $F_{m,n}$ tiene exactamente 5000 puntos.

Problema 14. Un castillo tiene infinitas habitaciones, numeradas por 1, 2, 3, ... El castillo consta de diferentes pasillos, y cada habitación está en un solo pasillo. Sabemos que para todo número entero positivo n, la habitación n está en el mismo pasillo que la habitación $3n + 1$ y que la habitación $n + 10$. Determina el número máximo de pasillos que puede tener el castillo.

Problema 15. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel. Agustina dice que Bob y Ciel son de la misma especie. Si le preguntas a Ciel si Agustina y Bob son de la misma especie, ¿qué contesta?

Problema 16. Calcula el producto

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{225}).$$

Problema 17. Si P, I, M satisfacen las ecuaciones

$$P + I + M = 3,$$
$$\frac{1}{P} + \frac{1}{I} + \frac{1}{M} = 4,$$
$$P^2 + I^2 + M^2 = 5.$$

Encuentra el valor del producto $P \cdot I \cdot M$.

Problema 18. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Raymond visitó este planeta y se encontró con dos seres, Agustina y Bob. Le preguntó a Agustina si alguno de los dos era humano, Agustina respondió y Raymond supo si alguno era humano. ¿Qué eran?

Problema 19. En una fiesta con 100 personas, y todas llevan una camiseta verde o roja. Los que llevan una camiseta verde siempre dicen la verdad, y los que llevan una camiseta roja siempre mienten. Cada persona de la fiesta dice con cuántas personas de verde se ha dado la mano, y es un número entre 0 y 99. Además, no hay ningún par de personas de la fiesta que hayan dicho el mismo numero. Sabemos que cada par de personas se dieron la mano como mucho una vez, y todos los invitados de la fiesta son capaces de ver los colores de las camisetas de todos los asistentes. Determina (con justificación) cuántas personas llevaban una camiseta verde en la fiesta.

Problema 20. En un país hay 100 ciudades, algunas de las cuales están conectadas por aerolíneas. Se sabe que desde cada ciudad se puede llegar a cualquier otra (posiblemente con escalas). Demuestra que es posible visitar todas las ciudades realizando no más de 196 vuelos.

Problema 21. En un cierto país, cada ciudad está conectada con cada otra por una carretera de sentido único. Demuestra que hay una ciudad desde la cual se puede llegar a cualquier otra.

Problema 22. En una agencia secreta trabajan n agentes: 001, 002, ..., 007, ..., n. Cada agente vigila exactamente un agente. El primer agente vigila a quien vigila al segundo, el segundo vigila a quien vigila al tercero, y así sucesivamente, el n-ésimo vigila a quien vigila al primer agente. Demuestra que n es un número impar.

Problema 23. Consideremos $2n$ puntos en el espacio, ninguno de los cuales yace en el mismo plano. Trazamos $n^2 + 1$ segmentos con extremos en estos puntos. Demuestra que los segmentos trazados forman:

a) Al menos un triángulo;

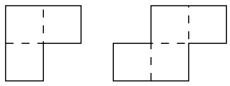
b) No menos de n triángulos.

Problema 24. Un conjunto de 3 números a, b, c se reemplaza cada segundo por $a + b - c$, $b + c - a$, $c+a-b$. Al principio, se tiene el conjunto de números 2023, 2024, 2025. ¿Es posible que en algún momento se obtenga el conjunto 2000, 2025, 2049?

Problema 25. Entre los números a, b y c hay dos que son iguales. El número restante es diferente. Construye una expresión aritmética con las letras a, b, c, los signos $+, -, \times, :$ y paréntesis, de modo que el resultado de los cálculos sea ese número. (Puedes usar cualquier cantidad de paréntesis, signos y letras).

Problema 26. Juan no conoce la existencia de las operaciones de multiplicación y elevar a una potencia. Sin embargo, ha aprendido bien la suma, resta, división y extracción de la raíz cuadrada, y también sabe cómo usar paréntesis. Practicando, Juan eligió tres números: 2, 3 y 5, y formó la expresión $\frac{3+5}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. ¿Puede él, utilizando exactamente los mismos tres números 2, 3 y 5 (una vez cada uno), formar una expresión cuyo valor sea más grande que 1000000?

Problema 27. Tenemos dos tipos de piezas formadas por tres y cuatro cuadraditos 1×1 respectivamente:



Queremos cubrir completamente un tablero rectangular con este tipo de piezas de manera que no se solapen. Permitimos rotar y reflejar las piezas. Usando sólo estos dos tipos de piezas, demuestra que es posible cubrir de esta manera un tablero $(2m-1) \times (2n-1)$ para todo par de números enteros $m, n \geq 4$, y que además el número mínimo de piezas que necesitaremos para hacerlo será mn.

Problema 28. Tenemos dos puntos distintos A y C marcados en una circunferencia, y no están diametralmente opuestos. Las rectas tangentes a las circunferencia en los puntos A y C respectivamente se cortan en un punto P. Sea B otro punto cualquiera en la circunferencia distinto de A y de C, y sea D el otro punto de corte de la recta PB con la circunferencia. Demuestra que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

Problema 29. Un castillo tiene infinitas habitaciones, numeradas por 1, 2, 3, ... Sabemos que para todo número entero positivo n, la habitación número n está en el mismo pasillo que las habitaciones número $2n+1$ y $8n+1$. ¿Cuál es el número máximo de pasillos que puede tener el castillo?

Problema 30. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para todo número real x distinto de 0 se cumpla que

$$f(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 3x.$$

Problema 31. Demuestra que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

para todo número entero positivo n.

Problema 32. Tenemos un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que ningún par de lados son paralelos. Llamamos E al punto en el que se intersecan la prolongación de los lados AD y BC, y llamamos F al punto en el que se intersecan la prolongación de AB y DC. Demuestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABE, ADF, DCE, y BCF pasan por un mismo punto.

Problema 33. Demuestra que $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ es un número irracional para todo número entero positivo n.

Problema 34. Demuestra que existen infinitos pares de números enteros (x, y) que satisfacen que $x^2 + y^2 + 2017 = 2019xy$.

Problema 35. Si le asignas valor 1 al dedo pulgar de cada mano, 2 al índice, 3 al dedo corazón, 4 al anular y 5 al meñique, cuando juntas las manos de manera que cada uno de tus dedos toca al dedo correspondiente de la otra mano, obtienes una puntuación de

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 55,$$

que es la puntuación más alta que puedes recibir. Si giras una de tus manos de manera que el pulgar de la mano izquierda toca al índice de la derecha, el índice de la izquierda al corazón de la derecha, y así hasta que el meñique de la izquierda toca al pulgar de la derecha, obtienes una puntuación de

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 45.$$

a) Girando las manos de esta manera, ¿cuál es la puntuación más baja que puedes recibir?

b) Si unos alienígenas que tienen 12 dedos en cada mano juegan a este juego (en el que ahora hay 12 giros posibles), ¿cuál es la puntuación más alta y la más baja que pueden recibir?

c) Si unos alienígenas que tienen n dedos en cada mano juegan a este juego (en el que ahora hay n giros posibles), ¿cuál es la puntuación más alta y la más baja que pueden recibir?

Problema 36. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (es decir, funciones cuyo dominio son los números reales y cuya imagen está contenida en los números reales) tales que

$$f(xy + 1) = xf(y) - f(x) + 6$$

para todo par de números reales x, y, y demuestra que has encontrado todas las soluciones posibles.

Problema 37. Tenemos un árbol con n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 2)$. Al vértice v_i se asigna un número real x_i, y a una arista $\{v_i, v_j\}$ se asigna el producto $x_j x_j$ de los números en los extremos de esa arista. Denotemos por S la suma de los números en todas las aristas. Demuestra que

$$\sqrt{n-1}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geq 2 \cdot S.$$

Problema 38. En un cierto país hay 32 ciudades, cada dos de las cuales están conectadas por una carretera de sentido único. Las recientes elecciones generales celebradas el 1 de enero de 2024, ganó el Frente de Villanos Malvados ganó que formó un gobierno el 1 de febrero de 2024. El Ministro de Comunicaciones decidió organizar el tráfico de tal manera que, al abandonar cualquier ciudad, no se pueda regresar. Para lograr esto, cada día, a partir del 1 de febrero de 2024, puede cambiar la dirección del tráfico en una de las carreteras. Demuestra que puede lograr su objetivo para el 1 de septiembre de 2024 (es decir, en 213 días).

Problema 39. Vamos a contar el número de árboles de n vértices etiquetados. Recuerda que un árbol es un grafo sin ciclos. Nuestros árboles van a tener sus vértices numerados de 1 a n, y vamos a decir que dos árboles etiquetados son el mismo si tienen las mismas conexiones, teniendo en cuenta los números. Por ejemplo, hay tres árboles etiquetados con 3 vértices: 1—2—3, 1—3—2 y 2—1—3.

1. Cuenta el número de árboles etiquetados con 4 vértices.

2. Demuestra que hay 125 árboles etiquetados con 5 vértices.

3. **(¡Muy difícil!)** Encuentra el número de árboles etiquetados con n vértices.