PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMATICAS

Fecha: 2, 9 y 16 de febrero de 2024 **Hoja generica**

Hoja Variada

Problema 1. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel, y le preguntas a Agustina si es humana. Te contesta, pero no entiendes qué dice. Entonces le preguntas a Bob qué ha dicho Agustina, y te contesta "Ha dicho que es un elfo". Ciel dice "No hagas caso a Bob, está mintiendo". ¿Qué son Bob y Ciel?

Solución. Sea lo que sea Agustina, dirá que es humana. Por tanto, Bob miente y Ciel dice la verdad. □

Problema 2. Se elige un número al azar del 0 al 500 (ambos incluidos). Sin enumerar todos esos enteros, ¿cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 7 o por 11?

Solución. Si dividimos 501 (la cantidad de números enteros entre 0 y 500, ambos incluidos) entre 7 nos da cociente 71 y resto 4. Eso significa que hay 72 números en el rango especificado que son divisibles por 7.

Si dividimos 501 entre 11 nos da cociente 45 y resto 6. Eso significa que hay 46 números en el rango especificado que son divisibles por 11.

Como el máximo común divisor de 7 y 11 es 1, un entero es divisible por 7 y por 11 exactamente cuando es divisible por 77. Si dividimos 501 entre 77 nos da cociente 6 y resto 39. Eso significa que hay 7 números en el rango especificado que son divisibles tanto por 11 como por 77.

Con el trabajo que hemos hecho, podemos concluir que hay $72 + 46 - 7 = 111$ números entre 0 y 500 (ambos incluidos) que son divisibles por 7 o por 11. Por tanto, la probabilidad que nos piden es $\frac{111}{501}$, el $22,16\%$ aproximadamente. □

Problema 3. Sea $ABCDE$ un pentágono, y sea P el punto medio del segmento AB. Sabemos que la mediatriz del segmento AB contiene al vértice D, que el pentágono es simétrico con respecto a la recta PD, y que los segmentos AE y BC son paralelos. Si $|BC| = 6$, $|AB| = 14$ y $|DP| = 13$, ¿cuál es el área del pentágono?

Solución. La de que el pentágono es simétrico con respecto a la recta PD nos dice que $\angle ABC = \angle BAE$ y que $|BC| = |AE|$. La condición de que los segmentos AE y BC son paralelos nos dice que $\angle BAE = 180° - \angle ABC$. Por tanto, $\angle ABC = \angle BAE = 90°$, y $ABCE$ es un rectángulo de base $|AB| = 14$ y altura $|BC| = 6$. Por tanto, el rectángulo $ABCD$ tiene área $14 \cdot 6 = 84$. Como $|DP| = 13$, el triángulo CDE tiene base $|EC| = |AB| = 14$ y altura $|DP| - |BC| = 13 - 6 = 7$, por lo que el triángulo CDE tiene área $\frac{14}{7}2 = 49$. Por tanto, el pentágono $ABCDE$ tiene área $84 + 49 = 133$. □

Problema 4. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel, y le preguntas a Agustina cuántos humanos hay entre ellos. Te contesta, pero no entiendes qué dice. Entonces le preguntas a Bob qué ha dicho Agustina, y te contesta "Ha dicho que hay un humano entre nosotros". Ciel dice "No hagas caso a Bob, está mintiendo". ¿Qué son Bob y Ciel?

Solución. Bob y Ciel no están de acuerdo, por lo que entre elles hay un humano y un elfo. Si Agustina hubiera dicho que hay un humano entre las tres, sería lo mismo que decir que ella misma es elfa, y no diría eso nunca. Por tanto, no hay dicho eso, Bob miente y Ciel dice la verdad.

□

Problema 5. Hay 20 tarjetas, cada una con un número del 1 al 20 escrito en cada uno de sus lados. Si consideramos todos los números que aparecen en los dos lados de las 20 tarjetas, cada número del 1 al 20 aparece dos veces. Demuestra que las tarjetas se pueden organizar de manera que todos los números en la parte superior sean diferentes.

Solución. Separaremos las tarjetas en las que está escrito el mismo número dos veces. Tomaremos una de las tarjetas restantes. Supongamos que los números escritos en ella son a y b. Colocaremos la tarjeta con el número a hacia arriba. Luego buscaremos la tarjeta en la que está escrito el segundo número b y la colocaremos con el número b hacia arriba. Continuaremos de esta manera hasta llegar a la tarjeta en la que está escrito el segundo número a. En este punto, el ciclo se detiene. Si aún quedan tarjetas, comenzaremos un nuevo ciclo y así sucesivamente.

□

Problema 6. En un círculo matemático, cada miembro tiene exactamente un amigo y un enemigo (las relaciones de amistad y enemistad son simétricas). Demostrar que:

a) el número de miembros del círculo es par;

b) el círculo se puede dividir en dos grupos neutrales (tal que no hay amigos y enemigos entre miembros del mismo grupo).

Solución. a) Todo el círculo se divide en pares de amigos.

b) Dado que el grado de cada vértice en el grafo correspondiente es igual a 2, el grafo se divide en ciclos. En cada ciclo, las aristas de "amistad" y "enemistad" se alternan, lo que significa que hay igual cantidad de ambas. Colocando en un círculo a los miembros de cada ciclo, tomados de forma alterna, obtenemos un grupo donde no hay ni amigos ni enemigos. Los miembros restantes forman el segundo grupo neutral.

□

Problema 7. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con un ser, que dice "Soy un elfo, o $2 + 2 = 5$". ¿Qué concluyes?

Solución. Como $2 + 2 = 4$, Agustina está diciendo que es un elfo. Esto es imposible. Quien miente es el autor del problema (Raymond Smullyan).

□

Problema 8. Tienes los ojos vendados y estás sentado frente a una mesa giratoria que tiene un interruptor en cada una de sus cuatro esquinas. El interruptor puede apuntar arriba o abajo. En cada turno puedes girar la mesa (pero no sabrás cuánto la has girado), estirarte hasta tocar dos de los interruptores (que estarán en esquinas seguidas u opuestas por la diagonal y esto lo sabrás según cuánto te hayas tenido que estirar), notar si están apuntando arriba o abajo, y cambiar la posición de uno de ellos, de los dos o de ninguno. Ganarás si acabas con todos los interruptores hacia arriba o todos hacia abajo (aunque tú no seas consciente de que lo están). Determina una estrategia con la que te puedas asegurar ganar siempre en un número finito de turnos, o demuestra que una estrategia así no puede existir.

Solución. La estrategia existe. Por ejemplo, podemos hacer esto, que asegura que habremos ganado en 5 turnos o menos.

1. Elige dos interruptores de esquinas seguidas, y haz que ambos apunten hacia arriba.

2. Elige dos interruptores de esquinas opuestas por la diagonal. Haz que ambos apunten hacia arriba. Como en el turno anterior elegiste uno de ellos, ahora tienes al menos tres interruptores apuntando hacia arriba. El juego continúa si el interruptor restante apunta hacia abajo.

3. Elige dos interruptores de esquinas opuestas por la diagonal. Si uno de ellos apunta hacia abajo, cámbialo para que apunte para arriba y habrás ganado. Si los dos apuntan hacia arriba, cambia uno de ellos para que apunte hacia abajo, y tendrás dos interruptores de esquinas seguidas que apuntan hacia arriba y dos que apuntan hacia abajo.

4. Elige dos interruptores de esquinas seguidas. Si los dos apuntan hacia arriba, haz que apunten hacia abajo y habrás ganado. Si los dos apuntan hacia abajo, haz que apunten hacia arriba y habrás ganado. Si hay uno de cada, cambia los dos, y ahora tendrás dos interruptores de esquinas opuestas que apuntan hacia arriba y dos de esquinas opuestas que apuntan hacia abajo.

5. Elige dos interruptores de esquinas opuestas por la diagonal, y cambia ambos de posición. Con esto has ganado.

□

Problema 9. Tenemos 40 piruletas para repartirlas entre 3 niños. ¿De cuántas maneras distintas podemos hacer esto (sin partir las piruletas) de manera que cada niño recibe más de una piruleta pero menos de 20?

Solución. Como cada niño recibe más de una piruleta, le empezamos dando dos piruletas a cada niño, y nos quedan 34 para repartir entre los demás. Si no imponemos que cada niño reciba menos de 20, la respuesta sería

$$\binom{34+2}{34} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630.$$

Sin embargo, a esto hay que restarle las opciones en las que exactamente uno de ellos recibe 20 o más piruletas (nunca pueden recibir 20 o más piruletas dos o más niños). Esto es

$$3 \cdot \binom{(34-18)+2}{34-18} = 3 \cdot \binom{18}{16} = \frac{3 \cdot 17 \cdot 18}{2} = 459.$$

Por tanto, la respuesta final es

$$630 - 459 = 171.$$

□

Problema 10. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel. Agustina dice que todos ellos son elfos. Bob dice que exactamente uno de ellos es elfo. ¿Qué son? ¿Se puede saber?

Solución. Agustina no puede ser humana, por tanto miente y alguno es humano. Si Bob es humano, entonces dice la verdad y Ciel es humane. Si Bob es elfo entonces miente y Ciel tiene que ser humane, porque Agustina habría dicho la verdad. No sabemos qué es Bob.

□

Problema 11. Encuentra el número primo más pequeño tal que la suma de sus dígitos es n, o demuestra que tal número primo no existe, si n es:

a) 13.

b) 14.

c) 15.

Solución. La respuesta a cada uno de estos apartados, de existir, es un número de dos o más dígitos.

a) La respuesta es 67. Los números de dos dígitos tal que la suma de sus dos dígitos es 13 son 49, 58, 67, 76, 85 y 94. 67 es el único de todos estos que es primo.

b) La respuesta es 59. Los números de dos dígitos tal que la suma de sus dos dígitos es 14 son 59, 68, 77, 86 y 95. 59 es el único de todos estos que es primo.

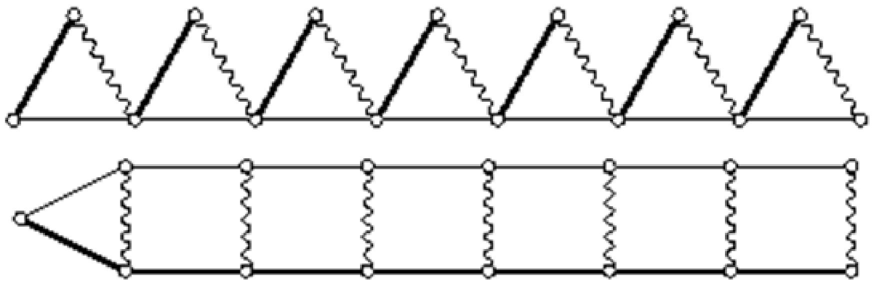
c) Dicho número primo no existe. Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es divisible por 3, por lo que si la suma de los dígitos de un número es 15, este es un número distinto de 3 que es divisible por 3, y por tanto no puede ser primo.

□

Problema 12. En un país hay 15 ciudades, algunas de las cuales están conectadas por líneas aéreas operadas por tres aerolíneas. Se sabe que incluso si cualquiera de las aerolíneas deja de operar, aún se puede llegar desde cada ciudad a cualquier otra (quizás con escalas) utilizando los vuelos de las dos aerolíneas restantes. ¿Cuál es el menor número posible de líneas aéreas que puede haber en el país?

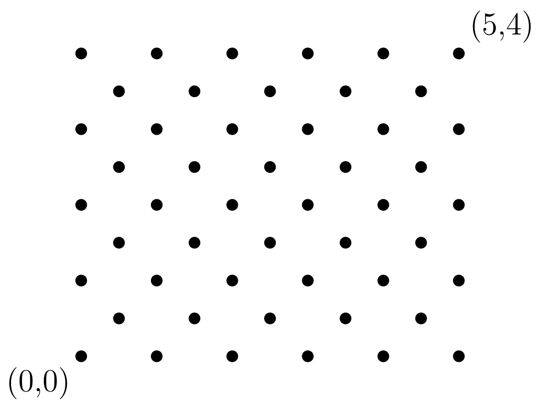
Solución. Denotemos la cantidad de líneas aéreas de las aerolíneas como a, b y c. Si cerramos las últimas c líneas aéreas, el grafo seguirá siendo conexo, por lo que $a+b \geq 14$. De manera análoga, $b+c, a+c \geq 14$. Sumando estas desigualdades, obtenemos $2(a+b+c) \geq 42$, lo que significa que las tres aerolíneas en conjunto tienen al menos 21 líneas aéreas.

Solo queda proporcionar un ejemplo con 21 líneas aéreas. Cualquiera de los ejemplos mostrados en las figuras es adecuado.



□

Problema 13. Para cada par de enteros $m \geq n \geq 1$, llamamos $F_{m,n}$ al conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq m$, $0 \leq y \leq n$ y tal que $2x$, $2y$ y $x+y$ son todos números enteros. Por ejemplo, $F_{5,4}$ tiene 50 puntos, colocados como las estrellas en la bandera de Estados Unidos de América:



a) Encuentra el número de puntos de $F_{m,n}$ en términos de m y n.

b) Encuentra todos los pares (m, n) para los cuales $F_{m,n}$ tiene exactamente 5000 puntos.

Solución. a) Hay $(m+1)(n+1)$ puntos en $F_{m,n}$ con las dos coordenadas enteras. Los puntos de $F_{n,m}$ que no tienen las coordenadas enteras son $\left(\frac{2k-1}{2}, \frac{2l-1}{2}\right)$ donde $k = 1, \ldots, m$ y $l = 1, \ldots, n$. Por tanto, la respuesta es

$$(m+1)(n+1) + mn = 2mn + m + n + 1.$$

b) Tenemos que resolver la ecuación

$$2mn + m + n + 1 = 5000.$$

La reescribimos como

$$\frac{(2m+1)(2n+1)}{2} + \frac{1}{2} = 5000,$$

que equivale a

$$(2m+1)(2n+1) = 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101.$$

Lo último que hemos escrito es la descomposición de 9999 en factores primos. Como $m \geq n \geq 1$, y $3^2 \cdot 11 < 101$, tenemos que 101 siempre tiene que ser un factor de $2m+1$. Además, como $n \geq 1$, o 3 o 11 dividen a $2n+1$. Por tanto, $2m+1$ puede tomar los valores 101, $101 \cdot 3$, $101 \cdot 3^2$, $101 \cdot 11$, $101 \cdot 3 \cdot 11$, y los correspondientes valores de $2n+1$ son 99, 33, 11, 9, y 3. Por tanto, las soluciones son:

$$(50, 49), \quad (151, 16), \quad (454, 5), \quad (555, 4), \quad (1666, 1).$$

□

Problema 14. Un castillo tiene infinitas habitaciones, numeradas por 1, 2, 3, ... El castillo consta de diferentes pasillos, y cada habitación está en un solo pasillo. Sabemos que para todo número entero positivo n, la habitación n está en el mismo pasillo que la habitación $3n+1$ y que la habitación $n+10$. Determina el número máximo de pasillos que puede tener el castillo.

Solución. Usando que si un pasillo contiene a la habitación n, entonces contiene a la habitación $n+10$ vemos que el pasillo que contiene a la habitación 1 contiene a todas las habitaciones que acaban en 1 $(1, 11, 21, 31, 41, \ldots)$, el que contiene a la habitación 2 contiene a todas las habitaciones que acaban en 2, y así hasta el pasillo que contiene a la habitación 10, que contiene todas las habitaciones que acaban en 0. Esto nos dice que no puede haber más de 10 pasillos.

Usando que si un pasillo contiene a la habitación n, entonces contiene a la habitación $3n+1$ vemos que el mismo pasillo contiene a las habitaciones 1, $4 = 3 \cdot 1 + 1$, $13 = 3 \cdot 4 + 1$, y $40 = 3 \cdot 13 + 1$, por lo que este pasillo tiene que contener a todas las habitaciones que acaban en $1, 3, 4$ o 0. Por otra parte, el pasillo que contiene a 2 tiene que contener a la habitación $7 = 3 \cdot 2 + 1$, por lo que este pasillo tiene que contener a todas las habitaciones que acaban en 2 o en 7. El pasillo que contiene al 5 tiene que contener también a $16 = 3 \cdot 5 + 1$, $49 = 3 \cdot 16 + 1$, $148 = 3 \cdot 49 + 1$, por lo que tiene que contener a todas las habitaciones que acaban en 5, 6, 8, o 9. Así, hemos visto que como mucho puede haber 3 pasillos.

Veamos que en efecto puede haber 3 pasillos, siendo el primer pasillo el que contiene todas las habitaciones que acaban en $1, 3, 4$ o 0, el segundo las que acaban en 2 o 7, y el tercerlo las que acaban en 5, 6, 8 o 9. Toda habitación está en uno de esos tres pasillos. Además,

- Si n acaba en 0, $3n+1$ acaba en 1.
- Si n acaba en 1, $3n+1$ acaba en 4.
- Si n acaba en 4, $3n+1$ acaba en 3.
- Si n acaba en 3, $3n+1$ acaba en 0.

por tanto el primer pasillo cumple que si n está en el primer pasillo, entonces $3n+1$ y $n+10$ están en ese pasillo. Esto se puede comprobar para el segundo y tercer pasillos análogamente. Por tanto la respuesta es 3.

□

Problema 15. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Te encuentras con tres seres, Agustina, Bob y Ciel. Agustina dice que Bob y Ciel son de la misma especie. Si le preguntas a Ciel si Agustina y Bob son de la misma especie, ¿qué contesta?

Solución. Si A dice que B y C son de la misma especie, lo que podemos concluir es que entre los tres, hay 1 ó 3 humanos. Por tanto, Ciel contesta lo mismo. $\square$

Problema 16. Calcula el producto

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\dots(1-\frac{1}{225}).$$

Solución. Observemos que $(1-\frac{1}{a^2})=(1-\frac{1}{a})(1+\frac{1}{a})=\frac{a-1}{a}\frac{a+1}{a}$. Por lo tanto,

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\dots(1-\frac{1}{225})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\dots\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8}{15}.$$

$\square$

Problema 17. Si P, I, M satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} P+I+M&=3,\\ \frac{1}{P}+\frac{1}{I}+\frac{1}{M}&=4,\\ P^2+I^2+M^2&=5. \end{aligned}$$

Encuentra el valor del producto $P\cdot I\cdot M$.

Solución. Tenemos que

$$4PIM=PIM\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{I}+\frac{1}{M}\right)=PI+PM+IM.$$

Por otra parte,

$$9=3^2=(P+I+M)^2=(P^2+I^2+M^2)+2(PI+PM+IM)=5+2\cdot 4PIM=5+8PIM,$$

por lo que

$$PIM=\frac{9-5}{8}=\frac{1}{2}.$$

$\square$

Problema 18. En cierto planeta hay que tener cuidado, porque hay elfos muy peligrosos y humanos inofensivos. Tanto humanos como elfos gustan de disfrazarse de otra especie, con lo que todo es muy confuso. Los elfos siempre mienten y los humanos siempre dicen la verdad.

Raymond visitó este planeta y se encontró con dos seres, Agustina y Bob. Le preguntó a Agustina si alguno de los dos era humano, Agustina respondió y Raymond supo si alguno era humano. ¿Qué eran?

Solución. Si hubiera contestado que sí, no lo sabría, así que contestó que no. Agustina es elfa y Bob es humano. $\square$

Problema 19. En una fiesta con 100 personas, y todas llevan una camiseta verde o roja. Los que llevan una camiseta verde siempre dicen la verdad, y los que llevan una camiseta roja siempre mienten. Cada persona de la fiesta dice con cuántas personas de verde se ha dado la mano, y es un número entre 0 y 99. Además, no hay ningún par de personas de la fiesta que hayan dicho el mismo numero. Sabemos que cada par de personas se dieron la mano como mucho una vez, y todos los invitados de la fiesta son capaces de ver los colores de las camisetas de todos los asistentes. Determina (con justificación) cuántas personas llevaban una camiseta verde en la fiesta.

Solución. Numeramos a las personas del 0 al 99 según su respuesta. Veamos que sólo la persona 0 dice la verdad.

Si la persona 99 dice la verdad, eso significa que todo el mundo lleva camisetas verdes, y que todo el mundo le ha dado la mano a la persona 99. Pero entonces la persona 0 tiene que estar mintiendo, y eso contradice que todo el mundo lleve camisetas verdes. Por tanto, la persona 99 va de rojo.

Si la persona que ha contestado 98 dice la verdad, eso significa que todas las personas del 0 al 98 van de verde, y que 98 les ha dado la mano a todos ellos. Pero entonces la persona 0 tiene que estar mintiendo, y eso contradice que 0 vaya de verde. Por tanto, la persona 98 va de rojo.

Este razonamiento se generaliza así: Supongamos que sabemos que las personas $k, k+1, \ldots, 99$ van de rojo, para $k \geq 2$. Si la persona $k-1$ fuera de verde, eso significaría que todas las personas del 0 al $k-2$ van de verde, y la persona $k-1$ les ha dado la mano a todos ellos. Pero entonces la persona 0 tiene que estar mintiendo, y eso contradice que 0 vaya de verde. Por tanto, la persona $k-1$ va de rojo.

Reiterando el proceso, vemos que las personas del 1 al 99 van de rojo. Entonces la persona 0 no le ha podido dar la mano a nadie que vaya de verde, por lo que ha dicho la verdad. Por tanto, hay exactamente una persona que va de verde. Las condiciones del enunciado son posibles, por ejemplo, si ningún par de personas se da la mano.

$\square$

Problema 20. En un país hay 100 ciudades, algunas de las cuales están conectadas por aerolíneas. Se sabe que desde cada ciudad se puede llegar a cualquier otra (posiblemente con escalas). Demuestra que es posible visitar todas las ciudades realizando no más de 196 vuelos.

Solución. Consideremos el grafo correspondiente. Como el grafo es conexo, podemos quitar varias aristas y obtener un árbol. Si sabemos hace el ejercicio para este arbol lo sabremos hacer para el grafo inicial.

Demostraremos por inducción que en un árbol con n vértices ($n \geq 3$) existe un camino de longitud no superior a $2n$–4 que visita todos los vértices. La base ($n = 3$) es obvia. Paso de inducción. Consideremos un vértice colgante A y eliminemos este vértice y la arista saliente AB. Según la hipótesis de inducción, en el árbol restante hay un camino de longitud $2n$–6.que lo recorre. Insertando en ella el segmento BAB obtenemos una ruta de longitud $2n$–4 que recorre el árbol original.

$\square$

Problema 21. En un cierto país, cada ciudad está conectada con cada otra por una carretera de sentido único. Demuestra que hay una ciudad desde la cual se puede llegar a cualquier otra.

Solución. Argumentamos por Inducción por el número de ciudades. La base de inducción es obvia.

Paso inductivo. Eliminamos una de las ciudades. Por la suposición de inducción, existe una ciudad A con la propiedad requerida. Ahora recordamos la ciudad eliminada. Si hay al menos una carretera que lleva a esta ciudad, entonces la ciudad A es la buscada. En caso contrario, la propia ciudad eliminada satisface la propiedad requerida. $\square$

Problema 22. En una agencia secreta trabajan n agentes: 001, 002, ..., 007, ..., n. Cada agente vigila exactamente un agente. El primer agente vigila a quien vigila al segundo, el segundo vigila a quien vigila al tercero, y así sucesivamente, el n-ésimo vigila a quien vigila al primer agente. Demuestra que n es un número impar.

Solución. Denotemos a los agentes con vértices y tracemos una arista dirigida desde el agente A hasta el agente B en caso de que A vigile a B. Dado que cada agente vigila exactamente un agente, obtendremos algún ciclo (o varios ciclos). Según la condición, si comenzamos a seguir las aristas desde el primer agente y pasamos por dos aristas a la vez, encontraremos consecutivamente a todos los agentes con números 2, 3, ..., n, y al final regresaremos al primer agente (esto significa, en particular, que hay solo un ciclo). Pero en el caso de un número par de agentes, de esta manera solo recorreremos la mitad del ciclo. Así que n es un número impar. $\square$

Problema 23. Consideremos $2n$ puntos en el espacio, ninguno de los cuales yace en el mismo plano. Trazamos $n^2 + 1$ segmentos con extremos en estos puntos. Demuestra que los segmentos trazados forman:

a) Al menos un triángulo;

b) No menos de n triángulos.

Solución. a) Seleccionemos un punto desde el cual parten la mayor cantidad de segmentos. Denotémoslo como A_1, y los extremos de los segmentos que parten de él como B_1, $\ldots$, B_k. Los otros puntos las denotaremos como A_2, ..., A_{2n-k}. Si no hay triángulos, entonces no hay segmentos entre los puntos B_1, $\ldots$, B_k. Por lo tanto, cada uno de ellos tiene no más de $2n-k$ segmentos que parten de ellos. Dado que cada punto A_i $(i = 1, ..., 2n-k)$ tiene no más de k segmentos que parten de él, el número total de segmentos no supera

$$\frac{1}{2}\left(k(2n-k) + (2n-k)k\right) = k(2n-k) \leq n^2.$$

Contradicción.

b) Realizaremos la demostración por inducción sobre n.

Base. Para $n = 2$ (4 puntos y 5 segmentos), la afirmación se verifica directamente.

Paso de inducción. Supongamos que hay $2n+2$ puntos y $(n+1)^2+1$ segmentos. Según a), los segmentos trazados forman al menos un triángulo ABC. Aún se necesitan n triángulos más. Designemos la cantidad de segmentos que parten de los vértices del triángulo ABC (sin contar sus lados) como k_A, k_B, y k_C, respectivamente. Si $k = k_A + k_B + k_C \leq 3n-2$, entonces para dos de los vértices del triángulo, por ejemplo, A y B, el número total de segmentos $k_A + k_B$ no es mayor que $2n-2$. Eliminemos esos puntos y todos los segmentos que parten de ellos (junto con los lados del triángulo ABC). Obtendremos un conjunto de puntos conectados por no menos de $n^2+1-(2n-2)-3 = n^2+1$ segmentos, que según la hipótesis de inducción forman no menos de n triángulos.

Si $k \geq 3n-1$ y los k segmentos que estamos considerando forman t triángulos con los lados AB, BC y CA, entonces $t \geq n$. En efecto, supongamos que entre las $2n+2-3 = 2n-1$ puntos, excluyendo a A, B y C, hay n_j puntos desde los cuales parten j segmentos hacia los vértices A, B y C $(j = 0, 1, 2, 3)$. Entonces,

$$n_1 + n_2 + n_3 \leq n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = 2n-1,$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = k \geq 3n-1,$$

por lo tanto, $t = n_2 + 3n_3 \geq n_2 + 2n_3 \geq (3n-1) - (2n-1) \geq n$.

□

Problema 24. Un conjunto de 3 números a, b, c se reemplaza cada segundo por $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Al principio, se tiene el conjunto de números 2023, 2024, 2025. ¿Es posible que en algún momento se obtenga el conjunto 2000, 2025, 2049?

Solución. No, porque la suma $a+b+c$ es fija. □

Problema 25. Entre los números a, b y c hay dos que son iguales. El número restante es diferente. Construye una expresión aritmética con las letras a, b, c, los signos $+, -, \times, :$ y paréntesis, de modo que el resultado de los cálculos sea ese número. (Puedes usar cualquier cantidad de paréntesis, signos y letras).

Solución. $\frac{a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)}{(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)}$.

□

Problema 26. Juan no conoce la existencia de las operaciones de multiplicación y elevar a una potencia. Sin embargo, ha aprendido bien la suma, resta, división y extracción de la raíz cuadrada, y también sabe cómo usar paréntesis. Practicando, Juan eligió tres números: 2, 3 y 5, y formó la expresión $\frac{3+5}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. ¿Puede él, utilizando exactamente los mismos tres números 2, 3 y 5 (una vez cada uno), formar una expresión cuyo valor sea más grande que 1000000?

Solución. Notar que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Por lo tanto $a^{\frac{1}{2^n}}$ consiste en sacar n raíces cuadradas. Observemos también que

$$a - b = \frac{a^m - b^m}{a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}}.$$

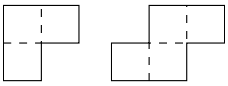
Para n grande la respuesta podría ser

$$\frac{5}{3^{\frac{1}{2^n}} - 2^{\frac{1}{2^n}}} = 5(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}),$$

donde $a = 3^{\frac{1}{2^n}}$, $b = 2^{\frac{1}{2^n}}$, $m = 2^n$.

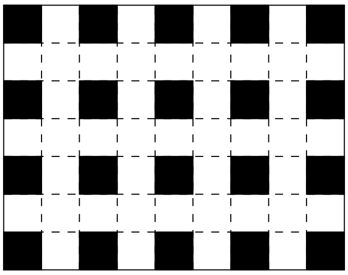
$\square$

Problema 27. Tenemos dos tipos de piezas formadas por tres y cuatro cuadraditos 1×1 respectivamente:



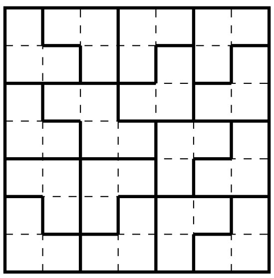
Queremos cubrir completamente un tablero rectangular con este tipo de piezas de manera que no se solapen. Permitimos rotar y reflejar las piezas. Usando sólo estos dos tipos de piezas, demuestra que es posible cubrir de esta manera un tablero $(2m-1) \times (2n-1)$ para todo par de números enteros $m, n \geq 4$, y que además el número mínimo de piezas que necesitaremos para hacerlo será mn.

Solución. Empezamos viendo que no se puede hacer esto con menos de mn piezas. Denotamos a cada cuadradito del tablero por (a, b), donde $1 \leq a \leq 2m-1$ y $1 \leq b \leq 2n-1$, empezando por abajo a la izquierda. Por ejemplo $(3, 2)$ es el tercer cuadradito por la izquierda y el segundo por abajo. Coloreamos de negro los cuadraditos del tablero que tienen las dos coordenadas impares. Por ejemplo, para $m = 5$ y $n = 4$, el dibujo es el siguiente:

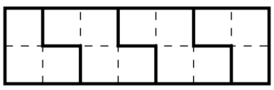


Así, hay mn cuadrados coloreados, y cada pieza ocupará como mucho uno de ellos, por lo tanto no se puede cubrir el rectángulo con menos de mn piezas.

Ahora, vamos a ver que el resultado es cierto si $n = 4$ para todo $m \geq 4$ por inducción. El caso base ($m = 4$) es cierto, como se puede ver en la siguiente imagen, en la que se usan 16 piezas:

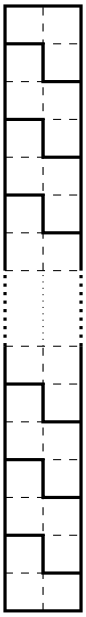


Además, vemos que añadiendo estos rectángulos de 4 piezas al caso base, obtenemos una forma de teselar los rectángulos $(2m-1) \times 7$ para todo $m \geq 4$ con $4m$ piezas:



Por tanto, el resultado es cierto para tableros $(2m-1) \cdot 7$ para todo $m \geq 4$.

Ahora, para ver que el resultado es cierto para tableros $(2m-1)\times 7$, basta añadir por la derecha $n-4$ rectángulos del tipo:



en los que hay dos piezas del primer tipo y $\frac{(2m-1)-3}{2} = m-2$ piezas del segundo, así que hay m piezas en este rectángulo, y

$$4m + (n-4)m = mn$$

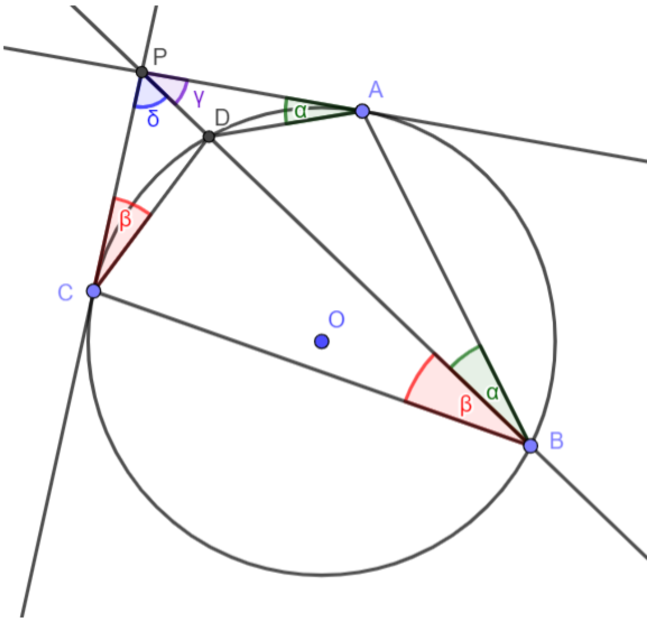
piezas en la teselación del tablero $(2m-1)\times(2n-1)$ que hemos encontrado.

$\square$

Problema 28. Tenemos dos puntos distintos A y C marcados en una circunferencia, y no están diametralmente opuestos. Las rectas tangentes a las circunferencia en los puntos A y C respectivamente se cortan en un punto P. Sea B otro punto cualquiera en la circunferencia distinto de A y de C, y sea D el otro punto de corte de la recta PB con la circunferencia. Demuestra que

$$|AB|\cdot|CD| = |BC|\cdot|DA|.$$

Solución. Hacemos el dibujo en el caso en el que B está en la cuerda más larga entre A y C de la circunferencia. Aquí, O es el centro de la circunferencia. El razonamiento es análogo cambiando los papeles de B y D.



Los dos ángulos denotados por α en el dibujo son iguales porque son ángulos inscritos (en el caso de $\angle ABD$) y semiinscritos (en el caso de $\angle DAP$) abarcando la misma cuerda de la circunferencia (AD). El mismo argumento nos dice que los dos ángulos denotados por β en el dibujo son iguales.

Observamos que los triángulos PAD y PBA son semejantes, al tener dos ángulos iguales (α y γ). Por tanto,

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PA|}.$$

También observamos que los triángulos PCD y PBC son semejantes, al tener dos ángulos iguales (β y δ). Por tanto,

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

Además, tenemos que los triángulos PAO y PCO son congruentes, ya que ambos son ángulos rectos en los que la hipotenusa mide lo mismo ($|PO|$) y uno de sus catetos también ($|CO| = |AO|$ porque ambos son el radio de la circunferencia), así que el teorema de Pitágoras nos especifica que los catetos restantes también miden lo mismo. Por tanto, $|PA| = |PC|$. Esto nos dice que la última y la penúltima fracción de las dos igualdades de fracciones anteriores son iguales. Por tanto, todas las fracciones que hemos escrito hasta ahora son iguales. En particular,

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|CD||}{|BC|},$$

por lo que

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|.$$

□

Problema 29. Un castillo tiene infinitas habitaciones, numeradas por 1, 2, 3, ... Sabemos que para todo número entero positivo n, la habitación número n está en el mismo pasillo que las habitaciones número $2n + 1$ y $8n + 1$. ¿Cuál es el número máximo de pasillos que puede tener el castillo?

Solución. La respuesta es que puede haber infinitos pasillos. De hecho, vamos a ver que, si n es el doble de un número impar, la habitación n puede estar en un pasillo en el que todas las habitaciones tienen un número mayor o igual que n. Como hay un número infinito de enteros positivos que son el doble de un número impar, concluiremos que puede haber infinitos pasillos.

Las operaciones de pasar de n a $2n+1$ o a $8n+1$ tienen descripciones muy sencillas en binario (añadir un 1 o un 001 al final de la expresión en binario de n, respectivamente).

Supongamos que n es el doble de un número impar, es decir, que la expresión en binario de n acaba en 10. El pasillo con menos habitaciones en el que puede estar n contiene exactamente a todas las habitaciones que, en binario, se pueden obtener a partir de n haciendo las operaciones de añadir o quitar 1 o 001 al final. Llamamos "el 0 especial" a la última cifra de la expresión en binario de n. Al hacer la operación de añadir 1 o 001 no cambia la paridad del número de 0's después de el 0 especial. Al hacer la operación de quitar 1 o 001 de un número que ha sido obtenido a partir de n con las operaciones de añadir 1 o 001 tampoco cambia la paridad del número de 0's después del 0 especial. El 0 especial no puede ser uno de los 0's que se quiten, porque significaría que en algún momento hubo un número impar de ceros después del 0 especial. Las últimas frases implican que con las operaciones de añadir o quitar 1 o 001 a partir de n sólo podemos obtener números cuya expresión en binario empieza por la expresión en binario de n, por lo que n es el número más pequeño en este conjunto.

Así, hemos visto que los números $2 = 2 \cdot 1, 6 = 2 \cdot 3, 10 = 2 \cdot 5, 14 = 2 \cdot 7, 18 = 2 \cdot 9, 22 = 2 \cdot 11, \ldots$ pueden estar todos en pasillos distintos, por lo que puede haber infinitos pasillos.

□

Problema 30. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para todo número real x distinto de 0 se cumpla que

$$f(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 3x.$$

Solución. Sustituyendo x por $\frac{x-1}{x}$ obtenemos la ecuación

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = 3\frac{x-1}{x} \quad \text{para todo número real } x \text{ distinto de 1.}$$

Por tanto, restando dos veces esta ecuación de la ecuación de la condición original, obtenemos que

$$f(x) - 4f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = 3x - 6 + \frac{6}{x} \quad \text{para todo número real } x \text{ distinto de 0 y 1.}$$

Ahora, sustituyendo x por $\frac{-1}{x-1}$ en la ecuación de la condición original y multiplicándola por 4, obtenemos que

$$4f\left(\frac{-1}{x-1}\right) + 8f(x) = \frac{-12}{x-1} \quad \text{para todo número real } x \text{ distinto de 1}$$

y sumando las dos últimas ecuaciones que hemos obtenido, tenemos que

$$9f(x) = 3x - 6 + \frac{6}{x} - \frac{12}{x-1} \quad \text{para todo número real } x \text{ distinto de 0 y 1,}$$

o equivalentemente,

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3x} - \frac{4}{3(x-1)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + 2x - 2 - 4x}{3x(x-1)} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{3x(x-1)}$$

para todo número real x distinto de 0 y 1. Podemos comprobar que esto cumple la ecuación de la condición inicial para $x \neq 0, 1$:

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2}{3x(x-1)} + 2\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 2}{3 \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \left(\frac{x-1}{x} - 1\right)} = \frac{x^3 - 3x^2 - 2}{3x(x-1)} - 2\frac{(x-1)^3 - 3x(x-1)^2 - 2x^3}{3x(x-1)} = 3x.$$

Veamos qué valores debería tomar $f(x)$ para $x = 0$ y para $x = 1$. Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación de la condición original, obtenemos que $f(1) + 2f(0) = 3$. Esta es la única instancia en la que el valor $f(0)$ o el valor $f(1)$ pueden aparecer en la ecuación original, así que es la única condición que tenemos. Por tanto, hay infinitas soluciones a este problema, que son

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x^2-2}{3x(x-1)} & \text{si } x \neq 0, 1 \\ a & \text{si } x = 0 \\ 3 - 2a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(hay una solución para cada número real a).

□

Problema 31. Demuestra que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

para todo número entero positivo n.

Solución. La parte derecha de la igualdad es el número de maneras de hacer un equipo de n personas de entre $2n$ personas posibles. Para hacer un equipo de n personas de entre $2n$ posibles, puedo coger i personas de entre las n primeras personas y $n - i$ de entre las n restantes, y esto lo puedo hacer para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Así, vemos que

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

La igualdad deseada se obtiene de que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

□

Problema 32. Tenemos un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que ningún par de lados son paralelos. Llamamos E al punto en el que se intersecan la prolongación de los lados AD y BC, y llamamos F al punto en el que se intersecan la prolongación de AB y DC. Demuestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos ABE, ADF, DCE, y BCF pasan por un mismo punto.

Solución. Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar los vértices de $ABCD$ de manera que siguen el orden contrario a las agujas del reloj y el interior de los triángulos DCE y ADF no interseca al interior del cuadrilátero $ABCD$. A partir de ahora, asumiremos esto.

La solución completa de este problema es muy técnica. De hecho, el enunciado es cierto también si quitamos la condición de que el cuadrilátero $ABCD$ sea convexo, pero la demostración aún se vuelve más técnica. Los siguientes enunciados no son obvios, pero se usan implícitamente en la demostración:

1. Las circunferencias circunscritas a los triángulos ADF y DCE no son tangentes, es decir, además de cortarse en el punto D se cortan en otro punto distinto, que llamamos H.

2. Los puntos E, F, A, B, C, D son todos distintos.

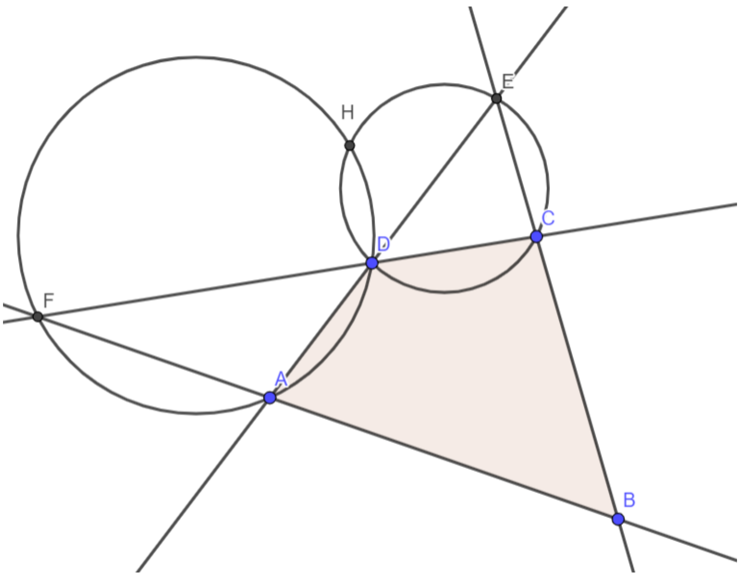
3. El punto H es distinto de los puntos A, B, C, D, E, F.

4. $EHDC$ y $ADHF$ son cuadriláteros (con los vértices en ese orden siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj).

5. $ABEH$ y $BCHF$ son cuadriláteros (con los vértices en ese orden siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj).

6. Los puntos E y A están en lados distintos de la recta DH. Los puntos F y C también.

Por ahora, vamos a asumir que estas afirmaciones son ciertas, y a partir de ellas, acabar la demostración del ejercicio. Después demostraremos que todas estas afirmaciones eran ciertas.



Nuestro objetivo es ver que H también se encuentra en las circunferencias circunscritas a los triángulos ABE y BCF. Para ver que H se encuentra en la circunferencia circunscrita al triángulo ABE basta ver que el cuadrilátero $ABEH$ es cíclico.

Como $EHDC$ es un cuadrilátero cíclico tenemos que $\angle EHD = 180° - \angle DCE = \angle BCD$. Como H y F están en la circunferencia circunscrita a ADF y al mismo lado de la cuerda AD (ya que $ADHF$ es un cuadrilátero), tenemos que $\angle AFD = \angle AHD$. En particular,

$$\angle AHE = \angle AHD + \angle DHE = \angle AFD + \angle BCD,$$

(aquí estamos usando implícitamente la afirmación 6) y como $\angle AFD = \angle BFC$ y $\angle BCD = \angle BCF$, mirando al triángulo BCF obtenemos que

$$\angle AHE = \angle BFC + \angle BCF = 180° - \angle FBC = 180° - \angle ABE,$$

y esto implica que $ABEH$ es un cuadrilátero cíclico.

Similarmente se puede demostrar que $HFBC$ es cíclico, lo que implica que H está en la circunferencia circunscrita al triángulo BCF. Esto concluye la demostración si asumimos que las 6 afirmaciones del principio son ciertas.

Ahora, para concluir la solución, vamos a demostrar las afirmaciones del principio una a una.

1. Veamos que las circunferencias circunscritas a los triángulos ADF y DCE no pueden ser tangentes, por reducción al absurdo: Sea r_1 el radio de la circunferencia circunscrita a ADF y r_2 el radio de la circunferencia circunscrita a DCE. Sea O_1 el centro de la circunferencia circunscrita a ADF y O_2 el centro+++ de la circunferencia circunscrita a DCE. Si las dos circunferencias fueran tangentes, D estaría en la recta O_1O_2. Los triángulos FO_2D y CO_1D son dos triángulos isósceles tales que $\angle CDO_2 = \angle O_1DF$, ya que las rectas O_1O_2 y CF se cortan en el punto D. En particular, tenemos que
$$\frac{|CD|}{|DF|} = \frac{r_2}{r_1}.$$
Argumentando de manera similar, obtenemos que
$$\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{r_2}{r_1},$$
y como $\angle ADF = \angle CDE$ (por ser ángulos opuestos a las rectas CF y AE), obtenemos que los triángulos ADF y EDC son semejantes. Esto implica que las rectas CE y AF son paralelas. El punto B está en estas dos rectas, por lo que tendrían que ser la misma, pero eso implicaría que A, B, y C están alineados, contradiciendo que $ABCD$ sea un cuadrilátero. Por tanto, queda demostrado que las circunferencias circunscritas a los triándulos ADF y DCE no son tangentes. En particular, se cortan también en un punto H distinto de D.

2. Argumentamos por reducción al absurdo. Si alguno de estos pares de puntos fueran iguales, habría tres puntos de entre A, B, C y D alineados, y esto es imposible porque $ABCD$ es un cuadrilátero.

3. Ya sabemos que $H \neq D$, veamos que $H \neq E$, y por la simetría del problema, esto nos dirá también que $H \neq F$. Lo vemos por reducción al absurdo. Si H fuera igual a E, la circunferencia circunscrita al triángulo ADF contendría a tres puntos alineados (A, D y H) y esto sólo es posible si dos de esos puntos son iguales, es decir, si $A = H = E$, que ya sabemos que es imposible. Por tanto deducimos que $H \neq E$ (y $H \neq F$). Ahora, veamos que $H \neq A$, y por la simetría del problema, esto nos dirá que $H \neq C$. Si H fuera igual a A, los puntos alineados A, D, E estarían en una misma circunferencia, y esto es posible sólo si dos de ellos son iguales, que sabemos que no lo son por el punto 2. Por tanto, deducimos que $H \neq A$ (y $H \neq C$). Nos queda demostrar que $H \neq B$, y lo hacemos otra vez por reducción al absurdo. Si H fuera igual a B, los puntos alineados $B = H$, C y E estarían en una misma circunferencia, y esto es posible sólo si dos de ellos son iguales, que sabemos que no lo son por el punto 2.

4. Por la simetría del problema basta ver que $EHDC$ es un cuadrilátero. Sabemos por los puntos 2 y 3 que E, H, D, C son puntos distintos que además están en una circunferencia, por lo que no hay tres alineados. Sólo tenemos que demostrar que los vértices E, H, D, C aparecen en ese orden al recorrer la circunferencia en alguno de los dos sentidos. Para ello, basta ver que H y C están en lados distintos de la recta DE. Las rectas AD y DC dividen el plano en cuatro regiones. Como el cuadrilátero $ABCD$ es convexo, y por lo que hemos asumido en el primer párrafo de esta solución, tenemos que una de las regiones (R_1) contiene al cuadrilátero $ABCD$, otra (R_2) al triángulo DCE, otra (R_3)al triángulo ADF, y queremos ver que H está en la región restante, a la que llamamos R_4. Observamos que H no puede estar en las rectas DC o AD, ya que la circunferencia circunscrita al triángulo DCE ya tiene dos puntos distintos de H en esas rectas. Para ver que H no está en el interior de la región R_3 basta ver que la circunferencia circunscrita al triángulo DCE no tiene ningún punto en el interior de R_3. Esta circunferencia ya corta a las recta DC y AD (y a todas las rectas entre estas dos que dan lugar a las regiones R_2 y R_3) en dos puntos de la región R_2 (incluido el borde), por lo que no puede cortarlas en más. Por tanto, H no puede estar en el interior de la región R_3, y argumentando de manera análoga con la circunferencia circunscrita al triángulo ADF, concluimos que H no puede estar en el interior de la región R_2 En particular, H sólo puede estar en el interior de R_1 o de R_4. Veamos ahora que H no puede estar en el interior de R_1 por reducción

al absurdo. Si H estuviera en R_1, $EDFH$ sería un cuadrilátero, por lo que la suma de sus ángulos interiores sería $360°$. Por tanto, ocurriría que

$$360° = \angle HED + \angle EDF + \angle DFH + \angle FHE = \angle HED + \angle EDF + \angle DFH + \angle FHD + \angle DHE.$$

Como H estaría al otro lado de la recta DC que E, $EDHC$ sería un cuadrilátero cíclico y $\angle DHE = 180° - \angle CED$. Por el mismo motivo, pero argumentando con el cuadrilátero $AHDF$ en la circunferencia c_2, obtendríamos que $\angle FHD = 180° - \angle DFA$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior, obtenemos que

$$\angle HED + \angle EDF + \angle DFH = \angle CED + \angle DFA.$$

Notamos que el ángulo $\angle EDF$ del cuadrilátero $EDFH$ es mayor que $180°$. Por tanto, basta demostrar que $\angle CED + \angle DFA \leq 180°$. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos interiores al cuadrilátero convexo $ABCD$. Usando que la suma de los ángulos en los triángulo AFD y EDC es $180°$, obtenemos que

$$\angle DFA + (180° - \alpha) + (180° - \delta) = 180°, \quad \angle CED + (180° - \gamma) + (180° - \delta) = 180°,$$

por lo que, usando que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, obtenemos que

$$\angle CED + \angle DFA + 360° = (\alpha + \gamma + \delta) + \delta = 360° + \delta - \beta,$$

es decir

$$\angle CED + \angle DFA = \delta - \beta < \delta,$$

y como $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, $\delta < 180°$ y llegamos a una contradicción. Esto concluye nuestra demostración de que H está en el interior de R_1, y en particular H y C están a lados distintos de la recta DE, y $EHDC$ es un cuadrilátero.

5. Por la simetría del problema basta ver que $ABEH$ es un cuadrilátero. Ya hemos visto que H y C están a lados distintos de la recta DE (que es la misma que la recta AD). También, como $ABCD$, B y C están en el mismo lado de la recta AD. Por tanto H y B están a lados distintos de la recta AD. Combinando esto con los puntos 2 y 3 concluimos que $ABEH$ es un cuadrilátero.

6. Esto es consecuencia de que D está en el segmento AE y en el segmento FC, que a su vez es consecuencia de lo que hemos asumido en el primer párrafo de esta solución.

$\square$

Problema 33. Demuestra que $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ es un número irracional para todo número entero positivo n.

Solución. Tenemos que $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = n + 1 - n = 1$ por lo que, si $A = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ es un número racional, también lo será su inverso $B = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Argumentamos por reducción al absurdo, asumiendo que A es racional. Hemos visto que entonces B también es un número racional, por lo que los siguientes números también son racionales:

$$\frac{A+B}{2} = \sqrt{n+1}, \quad \frac{A-B}{2} = \sqrt{n}.$$

En particular, como A y B son positivos, existen números enteros positivos a, b tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$ y

$$\sqrt{n+1} = \frac{a}{b}.$$

Elevando al cuadrado, obtenemos que $n + 1 = \frac{a^2}{b^2}$, y como tenemos fracciones reducidas a ambos lados de la igualdad, deducimos que $b = 1$ y que $n + 1 = a^2$, es decir, $n + 1$ es un cuadrado perfecto. Similarmente podemos deducir que n es un cuadrado perfecto, es decir, existe un número entero positivo c tal que $n = c^2$. Como $n + 1 > n$, tenemos que $a > c$. Ahora,

$$1 = (n+1) - n = a^2 - c^2 = (a+c)(a-c)$$

es una expresión de 1 como el producto de dos enteros positivos, y esto sólo es posible si $a+c=1=a-c$, que implica que $a=1$ y $c=0$. Pero como $c^2=n\geq 1$, es imposible que $c=0$, por lo que hemos llegado a una contradicción. La contradicción viene de asumir que $A=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ es un número racional, por lo que concluimos que A es un número irracional.

□

Problema 34. Demuestra que existen infinitos pares de números enteros (x, y) que satisfacen que $x^2 + y^2 + 2017 = 2019xy$.

Solución. Observamos que $(x, y) = (1, 1)$ es una solución a la ecuación. Supongamos que (x, y) es una solución, y buscamos soluciones del tipo $(x + a, y)$. Se tiene que cumplir que

$$(x+a)^2 + y^2 + 2017 = 2019(x+a)y$$

y, como (x, y) cumple que $x^2 + y^2 + 2017 = 2019xy$, a tiene que ser solución a la ecuación

$$a(a - (2019y - 2x)) = 0,$$

es decir, $a = 0$ o $a = 2019 - 2x$. Acabamos de demostrar que

si (x, y) es solución, entonces $(2019y - x, y)$ también es solución.

Como x e y juegan el mismo papel en este problema, también tendremos que

si (x, y) es solución, entonces $(y, 2019y - x)$ también es solución.

Si hacemos el proceso descrito en la frase anterior empezando con $(x, y) = (1, 1)$, obtenemos las soluciones

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \quad (x_2, y_2) = (1, 2018), \quad (x_3, y_3) = (2018, 4074341), \quad (x_4, y_4) = (4074341, 8226092461), \quad \ldots$$

Veamos que repitiendo este proceso podemos obtener infinitas soluciones. Si demostramos que en todas estas soluciones se cumple que $x \leq y$ y que la coordenada de las y's es estrictamente creciente, habremos demostrado que este proceso da lugar a infinitas soluciones. Llamamos (x_n, y_n) a la solución obtenida a partir de $(1, 1)$ en el paso n. Demostremos por inducción que $1 \leq x_n \leq y_n$ y $y_n > y_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Como ya hemos calculado $(x_2, y_2) = (1, 2018)$, el caso base ($n = 2$) está claro. Para el paso de inducción, suponemos que $1 \leq x_k \leq y_k$ y $y_k > y_{k-1}$ para algún $k \geq 2$, y tenemos que demostrar que $1 \leq x_{k+1} \leq y_{k+1}$ y $y_{k+1} > y_k$. Como $x_{k+1} = y_k$ tenemos que $x_{k+1} \geq 1$. Como $y_{k+1} = 2019y_k - x_k$ y $x_k \leq y_k$ tenemos que $x_{k+1} = y_k \leq y_k + (y_k - x_k) = 2y_k - x_k < 2019y_k - x_k = y_{k+1}$. Por último, notamos que de la ristra anterior de desigualdades también se deduce que $y_k < y_{k+1}$. Esto concluye nuestra demostración por inducción.

□

Problema 35. Si le asignas valor 1 al dedo pulgar de cada mano, 2 al índice, 3 al dedo corazón, 4 al anular y 5 al meñique, cuando juntas las manos de manera que cada uno de tus dedos toca al dedo correspondiente de la otra mano, obtienes una puntuación de

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 55,$$

que es la puntuación más alta que puedes recibir. Si giras una de tus manos de manera que el pulgar de la mano izquierda toca al índice de la derecha, el índice de la izquierda al corazón de la derecha, y así hasta que el meñique de la izquierda toca al pulgar de la derecha, obtienes una puntuación de

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 45.$$

a) Girando las manos de esta manera, ¿cuál es la puntuación más baja que puedes recibir?

b) Si unos alienígenas que tienen 12 dedos en cada mano juegan a este juego (en el que ahora hay 12 giros posibles), ¿cuál es la puntuación más alta y la más baja que pueden recibir?

c) Si unos alienígenas que tienen n dedos en cada mano juegan a este juego (en el que ahora hay n giros posibles), ¿cuál es la puntuación más alta y la más baja que pueden recibir?

Solución. a) La puntuación más baja es $40 = 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 1+5\cdot 2$, sale tras dos o tres giros.

b) La puntuación más alta es $650 = 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+12\cdot 12$. La puntuación más baja es

$$1\cdot 7+2\cdot 8+3\cdot 9+4\cdot 10+5\cdot 11+6\cdot 12+7\cdot 1+8\cdot 2+9\cdot 3+10\cdot 4+11\cdot 5+12\cdot 6 = 434.$$

c) La desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a $(1,2,\ldots,n)$ y a algún giro del vector $(1,2,\ldots,n)$ nos dice que la puntuación más alta es $1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$. Podemos demostrar por inducción que

$$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Para la puntuación más baja, vamos a intentar encontrar una expresión sencilla en función de k de la siguiente fórmula, que corresponde a la puntuación que obtenemos al hacer $k-1$ de estos giros, para $k=1,2,\ldots,n$

$$1\cdot k+2\cdot(k+1)+\ldots(n-k+1)\cdot n+(n-k+2)\cdot 1+(n-k+3)\cdot 2+\ldots+n\cdot(k-1).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&1\cdot k+2\cdot(k+1)+\ldots(n-k+1)\cdot n\\
&=(1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+(n-k+1)\cdot(n-k+1))+(1+2+\ldots n-k+1)\cdot(k-1)\\
&=\frac{(n-k+1)(n-k+2)(2n-2k+3)}{6}+(k-1)\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}\\
&=\frac{k^3-3k^2+k(-3n^2-3n+2)+2n(n^2+3n+2)}{6}
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
&(n-k+2)\cdot 1+(n-k+3)\cdot 2+\ldots+n\cdot(k-1)\\
&=(n-k+1)(1+2+\ldots+(k-1))+\ldots+(1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+(k-1)\cdot(k-1))\\
&=(n-k+1)\frac{(k-1)k}{2}+\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\\
&=\frac{(k-1)k(3n-k+2)}{6}=\frac{-k^3+(3+3n)k^2-(3n+2)k}{6}
\end{aligned}$$

Por tanto, la puntuación que obtenemos al hacer $k-1$ giros es

$$\begin{aligned}
&\frac{k^3-3k^2+k(-3n^2-3n+2)+2n(n^2+3n+2)}{6}+\frac{-k^3+(3+3n)k^2-(3n+2)k}{6}\\
&=n\frac{3k^2-3k(n+2)+2(n^2+3n+2)}{6}
\end{aligned}$$

Como n es constante, basta minimizar la cantidad

$$k^2-k(n+2)$$

para $k=1,2,3,\ldots,n$. La función $f(x)=x^2-x(n+2)$ es una parábola con forma de sonrisa que corta al eje de las x's en $x=0$ y en $x=n+2$. Por tanto, el mínimo de la función $f(x)$ se obtiene en $x=\frac{n}{2}+1$. Si n es par, el número entero más cercano a este valor de x es él mismo, es decir, $\frac{n}{2}+1$. Si n es impar, los número enteros más cercanos a este valor de x son $\frac{n-1}{2}+1$ y $\frac{n+1}{2}+1$ (ambos están igualmente cerca, y recordamos que la parábola es simétrica respecto de la línea recta $x=\frac{n}{2}+1$). Recordamos que, para todo número real a, la notación $\lfloor a\rfloor$ significa el número entero menor o igual que a más cercano a a. Por tanto, el mínimo se alcanza tras $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ giros (y también tras $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ giros si n es impar), y la puntuación mínima que se puede alcanzar es

$$n\frac{3\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right)^2 - 3\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right)(n+2) + 2(n^2+3n+2)}{6}$$

□

Problema 36. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (es decir, funciones cuyo dominio son los números reales y cuya imagen está contenida en los números reales) tales que

$$f(xy+1) = xf(y) - f(x) + 6$$

para todo par de números reales x, y, y demuestra que has encontrado todas las soluciones posibles.

Solución. Si $x = 1, y = 1$, tenemos que $f(2) = 6$.

Si $y = 0$, sea lo que sea x, tenemos que $f(1) = xf(0) - f(x) + 6$. Por tanto, si conseguimos determinar los valores de $f(1)$ y $f(0)$, tendremos que

$$f(x) = xf(0) - f(1) + 6 \quad \text{para todo número real } x.$$

En particular, haciendo $x = 0$, obtenemos que $f(0) = 6 - f(1)$, y haciendo $x = 2$ obtenemos que $f(2) = 2f(0) - f(1) + 6$, por lo que $f(1) = 2f(0)$. Sustituyendo esto último en la ecuación $f(0) = 6 - f(1)$, obtenemos que $f(0) = 2$, y por tanto $f(1) = 4$. Por tanto, queda demostrado que, de existir, la única solución posible al problema es

$$f(x) = 2x + 2 \quad \text{para todo número real } x.$$

Ahora, sólo nos queda comprobar si esta $f(x)$ es solución al problema. Tenemos que

$$f(xy+1) = 2(xy+1) + 2 = 2xy + 4$$

y que

$$xf(y) - f(x) + 6 = x(2y+2) - 2x - 2 + 6 = 2xy + 4,$$

por lo que $f(x) = 2x + 2$ es la única solución al problema.

□

Problema 37. Tenemos un árbol con n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ($n \geq 2$). Al vértice v_i se asigna un número real x_i, y a una arista $\{v_i, v_j\}$ se asigna el producto $x_j x_j$ de los números en los extremos de esa arista. Denotemos por S la suma de los números en todas las aristas. Demuestra que

$$\sqrt{n-1}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geq 2 \cdot S.$$

Solución. Consideremos la arista $l = \{v_i, v_j\}$ que conecta los vértices v_i y v_j. Denotemos por $k_i(l)$ el número de vértices desde los cuales no se puede llegar al vértice v_i al eliminar la arista l. Está claro que $1 \leq k_i(l), k_j(l) \leq n-1$, y $k_i(l) + k_j(l) = n$. Además, para cada i,

$$\sum_{l=\{v_i,v_k\}} k_i(l) = n - 1$$

(la suma se toma sobre todas las aristas l que salen de x_i), ya que desde el vértice x_i se puede llegar a cada uno de los restantes $n-1$ vértices a través de un único camino que no se cruza consigo mismo.

De acuerdo con la desigualdad de Cauchy para la arista l, obtenemos

$$\frac{k_i(l)}{\sqrt{n-1}}x_i^2 + \frac{k_j(l)}{\sqrt{n-1}}x_j^2 \geq 2\sqrt{\frac{k_i(l)k_j(l)}{n-1}} \cdot |x_i x_j| \geq 2x_i x_j. \tag{1}$$

La última desigualdad es válida, ya que

$$k_i(l)k_j(l) = \frac{1}{4}\left((k_i(l)+k_j(l))^2 - (k_i(l)-k_j(l))^2\right) \geq \frac{1}{4}\left(n^2 - ((n-1)-1)^2\right) = n - 1.$$

Sumando las desigualdades (1) sobre todas las aristas, obtenemos la desigualdad requerida.

□

Problema 38. En un cierto país hay 32 ciudades, cada dos de las cuales están conectadas por una carretera de sentido único. Las recientes elecciones generales celebradas el 1 de enero de 2024, ganó el Frente de Villanos Malvados ganó que formó un gobierno el 1 de febrero de 2024. El Ministro de Comunicaciones decidió organizar el tráfico de tal manera que, al abandonar cualquier ciudad, no se pueda regresar. Para lograr esto, cada día, a partir del 1 de febrero de 2024, puede cambiar la dirección del tráfico en una de las carreteras. Demuestra que puede lograr su objetivo para el 1 de septiembre de 2024 (es decir, en 213 días).

Solución. Demostraremos una fórmula general. Supongamos que hay 2^n ciudades en el país. Entonces, el ministro podrá lograr su objetivo en no más de $2^{n-2}(2^n - n - 1)$ días.

Lema: Supongamos que hay $2k$ ciudades en el país, cada dos de las cuales están conectadas por una carretera de sentido único. Seleccionemos la mitad de ellas con el mayor número de carreteras salientes. Entonces el número total de carreteras que salen de las ciudades seleccionadas es al menos k^2.

Demostración: Sea C el conjunto de todas las cuidades. Supongamos que de las k ciudades C_0 seleccionadas salen menos de k^2 carreteras. Entonces, según el principio del palomar de Dirichlet, habrá una ciudad $c_0 \in C_0$ de la cual salen no más de $k-1$ carreteras. Luego, como se seleccionaron las ciudades con el mayor número de carreteras salientes, cada una de las k ciudades restantes (las de $C \setminus C_0$) también tiene no más de $k-1$ carreteras salientes. En total, hay menos de $k^2 + k(k-1) = 2k^2 - k$ carreteras salientes, mientras que el número total de carreteras es exactamente $\frac{2k(2k-1)}{2} = 2k^2 - k$. Contradicción, el lema está demostrado.

Ahora pasemos a la demostración de la fórmula principal. Demostraremos por inducción.

Base $n = 1$: Entre dos ciudades solo hay una carretera y ya está en una dirección. No es necesario hacer cambios.

Paso de inducción: Supongamos que la afirmación es cierta para 2^n ciudades. Demostraremos para 2^{n+1}. Dividimos las ciudades en dos grupos de 2^n ciudades cada uno de tal forma que en el primer grupo haya el mayor número de carreteras salientes. De acuerdo con el lema, de todas las ciudades de este grupo salen al menos 2^{2n} carreteras en total.

De estas carreteras, $\frac{2^n(2^n-1)}{2}$ son carreteras dentro del grupo, por lo que del primer grupo al segundo hay al menos $2^{n-1}(2^n + 1)$ carreteras. Entonces, de las 2^{2n} carreteras entre los dos grupos, no más de $2^{n-1}(2n - 1)$ están dirigidas hacia el primer grupo. Por lo tanto, en no más de $2^{n-1}(2^n - 1)$ días, el ministro dirigirá todas estas carreteras al segundo grupo. Además, en no más de $2 \cdot 2^{n-1}(2^n - n - 1)$ días logrará que en cada grupo al abandonar cualquier ciudad, no se pueda regresar. En total, se necesitarán no más de $2^{n-1}(2n + 1 - n - 2)$ días.

Dado que $32 = 2^5$, el ministro necesitará no más de $2^3(2^5 - 5 - 1) = 208$ días para lograr su objetivo, lo que es menos que los 213 días restantes hasta el 1 de septiembre de 2024.

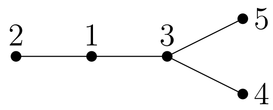
□

Problema 39. Vamos a contar el número de árboles de n vértices etiquetados. Recuerda que un árbol es un grafo sin ciclos. Nuestros árboles van a tener sus vértices numerados de 1 a n, y vamos a decir que dos árboles etiquetados son el mismo si tienen las mismas conexiones, teniendo en cuenta los números. Por ejemplo, hay tres árboles etiquetados con 3 vértices: 1—2—3, 1—3—2 y 2—1—3.

1. Cuenta el número de árboles etiquetados con 4 vértices.
2. Demuestra que hay 125 árboles etiquetados con 5 vértices.
3. **(¡Muy difícil!)** Encuentra el número de árboles etiquetados con n vértices.

Solución. No se me ocurre ninguna buena pista porque la solución es ingeniosísima, así que se queda sin pista. De hecho, *Proofs from THE BOOK* tiene tres o cuatro y son todas ingeniosísimas. La solución es n^{n-2}. Se puede dar una biyección entre el conjunto de árboles y el conjunto de sucesiones de $n-2$ números entre 1 y n.

Dado un árbol, se obtiene una sucesión así: buscamos la hoja (el vértice de grado 1) con la etiqueta más pequeña, y la borramos del árbol, y apuntamos el número de su vecino. Repetimos esto hasta que quedan 2 vértices. Es decir, de este árbol quitaríamos, en orden, $2, 1, 4$, y nos quedaría la sucesión $1, 3, 3$:



La inversa de esta biyección está dada así: Si una sucesión empieza por un número i, significa que había una hoja conectada con i. Esta hoja tendrá el número más bajo de los que no aparecen en la sucesión. Así sucesivamente (comprueba que no te miento).

$\square$