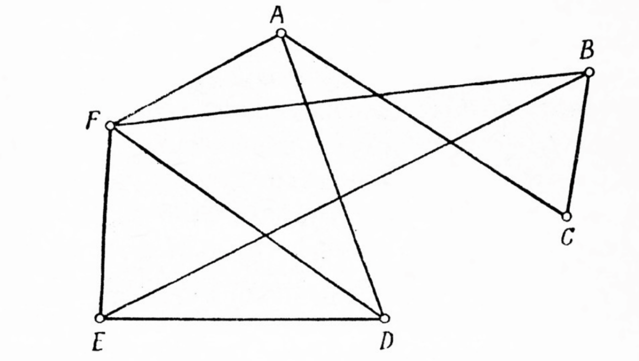
Pequeño Instituto de Matemáticas
2023 2024

Fecha: 12, 19 y 26 de Enero de 2024, **Grafos**[1] **Grupo Mercurio**

Supongamos que el equipo de fútbol de tu escuela participa en competiciones y juega contra equipos de otras escuelas. Supongamos que el número total de equipos es seis. Designemos tu equipo con la letra A, y los otros equipos con las letras B, C, D, E y F. Después de algunas semanas desde el inicio de las competiciones, resulta que algunos equipos ya han jugado entre sí.

Esto se puede representar mediante un esquema geométrico. Representaremos cada equipo como un punto o un pequeño círculo y conectaremos con segmentos aquellos pares de puntos que correspondan a equipos que ya hayan jugado entre sí. Entonces, para la lista de juegos realizados, obtendremos un esquema como el que se muestra en la figura.



Un esquema de este tipo se llama grafo. Está compuesto por varios puntos A, B, C, D, E y F, llamados **vértices**, y varios segmentos que conectan estos puntos, como AC o EB, llamados **aristas** del grafo.

En la figura anterior, se observa que los puntos de intersección de algunas aristas del grafo pueden no ser sus vértices; esto ocurre porque representamos nuestro grafo en un plano. Tal vez sería más conveniente imaginar sus aristas como hilos que se cruzan en el espacio; de cualquier manera, al representarlo en un plano, las vértices del grafo deben marcarse de forma muy clara para evitar confusiones (por ejemplo, con pequeños círculos).

El **grado** de un vértice es el número de aristas que salen de este vértice.

Problema 1. Sea G un grafo con n vértices $v_1, \ldots, v_n$ y m aristas. Si d_i denota el grado de v_i, demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m.$$

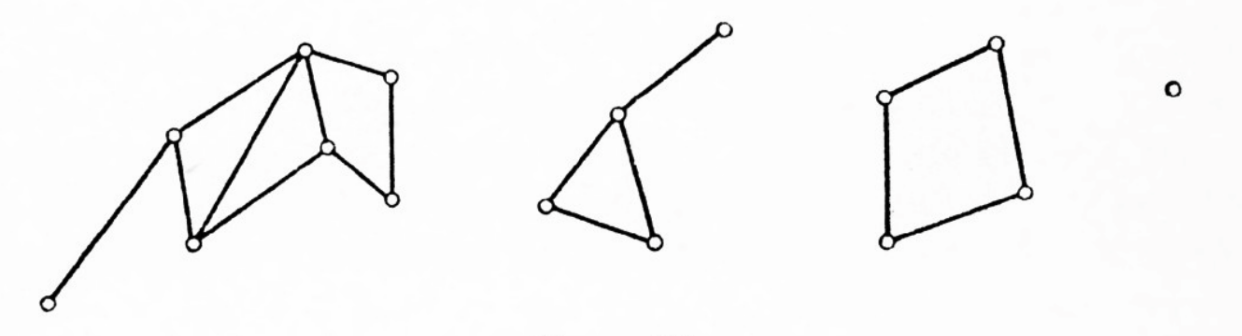
Concluye que el número de vértices de grado impar en un grafo es par.

Supongamos que tenemos un grafo G, que ahora imaginaremos como un mapa de carreteras. Comenzaremos nuestro recorrido por el grafo G desde algún vértice A, siguiendo primero a lo largo de la arista o carretera AB hasta algún vértice B, luego de B a C a lo largo de otra arista BC, y así sucesivamente. No impondremos restricciones a este viaje, permitiendo pasar por el mismo vértice varias veces e incluso usar las mismas aristas varias veces. Esta sucesión de vértices y aristas se llama **camino** dentro del grafo G. Sí el camino empieza y termina en el mismo vértice se llama **ciclo**.

[1] En la preparación de esta hoja hemos usado el libro "Graphs and their uses" de Oystein Ore

Si un vértice T en el grafo G es el vértice final de un camino que comienza en A, entonces se dice que T está **conectado** con A en G. Esto significa que hay carreteras que conducen de A a T. Si cada vértice de un grafo está conectado con cualquier otro vértice, entonces el grafo se llama **conexo**. En un grafo no conexo, no todos los vértices están conectados a un vértice dado A. Los vértices que se pueden conectar con el vértice A y todas las aristas incidentes en ellos forman una componente conexa del vértice A. Por lo tanto, cualquier grafo se descompone en componentes conexas, que no están conectadas entre sí.

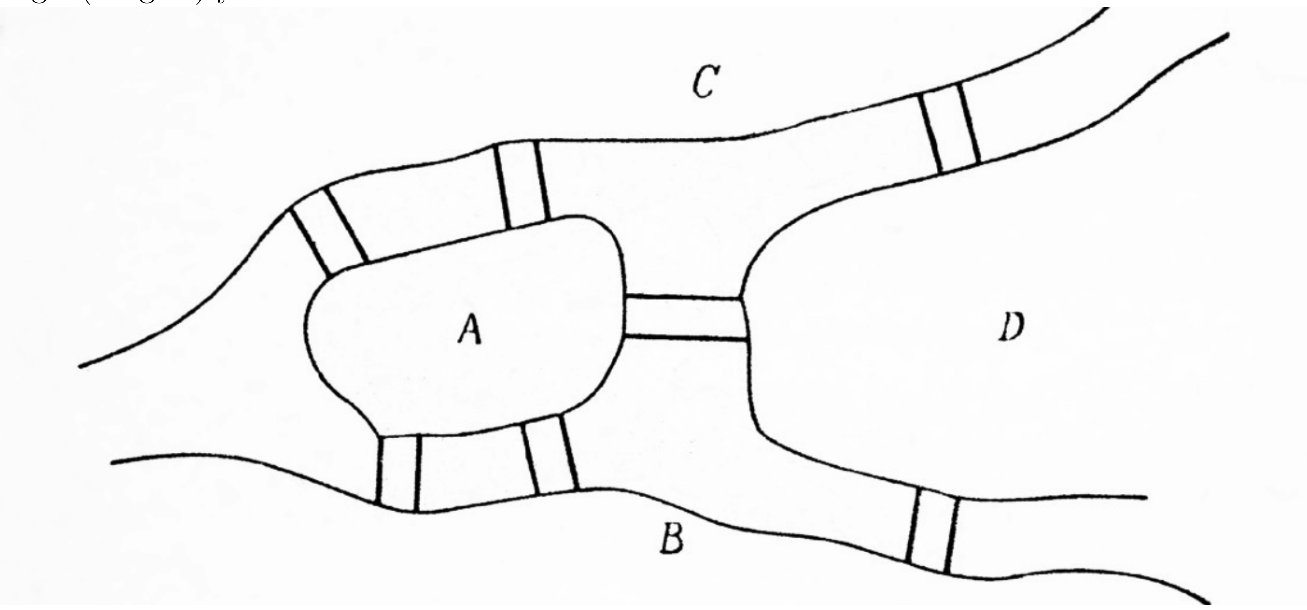
En la figura se muestra un grafo que consta de cuatro componentes conexas, una de las cuales es un vértice aislado.



Problema 2. Entre las nueve planetas del Sistema Solar se ha establecido una comunicación espacial. Las naves espaciales siguen las siguientes rutas: Tierra - Mercurio, Plutón - Venus, Tierra - Plutón, Plutón - Mercurio, Mercurio - Venus, Urano - Neptuno, Neptuno - Saturno, Saturno - Júpiter, Júpiter - Marte y Marte - Urano. ¿Es posible llegar de la Tierra a Marte?

Solución. Dibujemos un grafo: los vértices son las planetas, y las aristas son las rutas. El grafo tiene dos componente conexas y Tierra y Marte están en distintas componentes conexas. Ahora es evidente que no es posible llegar de Tierra a Marte. □

Euler comenzó su estudio sobre grafos al examinar un acertijo conocido como el "problema de los puentes de Königsberg". La ciudad de Königsberg (ahora Kaliningrado) estaba ubicada en las orillas del río Pregel (Prégola) y en dos islas.



Varias partes de la ciudad estaban conectadas por siete puentes. Los ciudadanos solían pasear por la ciudad los domingos. La pregunta era si era posible dar un paseo de tal manera que, saliendo de casa, pudieras regresar, pasando exactamente una vez por cada puente.

En términos de grafos este problema se puede formular de la siguiente manera. ¿En qué grafos se puede encontrar un ciclo que incluya todas las aristas del grafo, de modo que cada arista aparezca exactamente una vez en el ciclo? Este ciclo se llama **ciclo de Euler**, y un grafo que posee un ciclo de Euler se denomina **grafo euleriano**.

Para que un grafo tenga un ciclo de Euler, sólo puede tener una componente conexa con aristas. Es evidente que cada ciclo de Euler debe entrar y salir de cada vértice la misma cantidad de veces, es decir, los grados de todos los vértices del grafo deben ser pares. Hemos obtenido dos condiciones necesarias para que un grafo tenga un ciclo de Euler: conectividad y paridad de los grados de todos sus vértices.

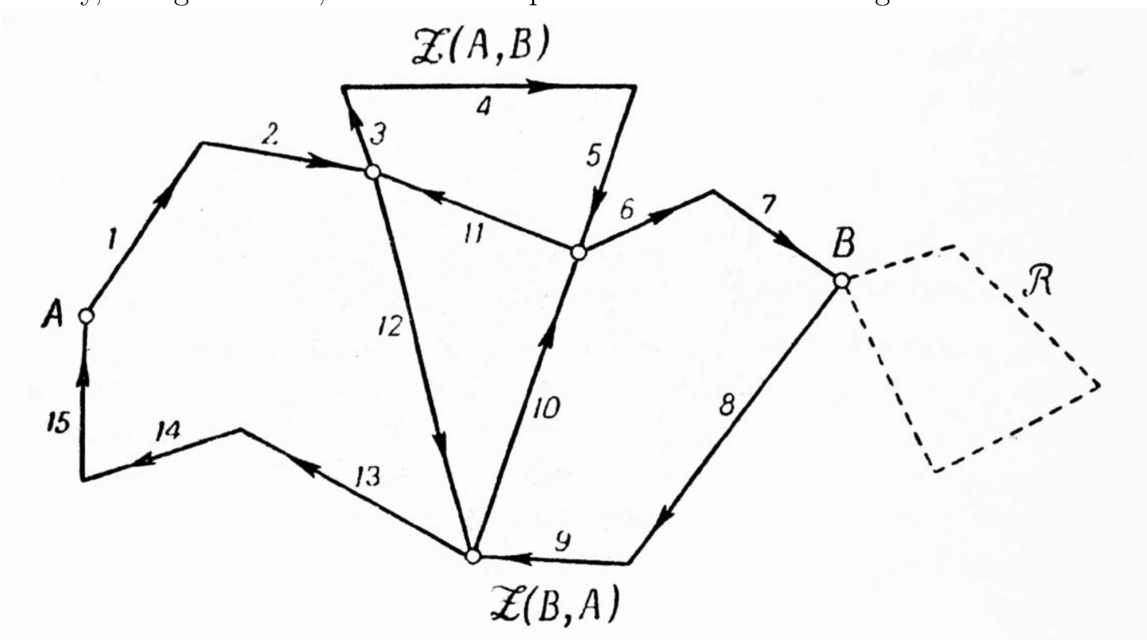
Euler demostró que estas condiciones también son suficientes.

Teorema 1. *Un grafo conexo, en el que todos los vértices tienen grados pares, posee un ciclo de Euler.*

Demostración. Supongamos que comenzamos un camino $\mathcal{Z}$ desde algún vértice A y la extendemos tanto como sea posible, recorriendo cada vez una arista no recorrida anteriormente. Debido a la finitud del número de aristas, este proceso eventualmente terminará. Pero dado que cada vértice tiene un número par de aristas, excepto el inicial, en cada vértice, excepto A, habrá una salida posible. Por lo tanto, el camino $\mathcal{Z}$ debe terminar en el vértice A.

Si $\mathcal{Z}$ pasa por todas las aristas del grafo, ya hemos obtenido un ciclo de Euler requerido. Si no es así, como el grafo es conexo, habrá un vértice B perteneciente a $\mathcal{Z}$ incidente a alguna arista que no pertenece al ciclo $\mathcal{Z}$. Dado que $\mathcal{Z}$ tiene un número par de aristas en el vértice B, el número de aristas que salen de B y no pertenecen a $\mathcal{Z}$ también es par; esto es cierto para todos los demás vértices.

Ahora comenzaremos un nuevo camino $\mathcal{R}$ desde el vértice B, utilizando solo las aristas que no pertenecen a $\mathcal{Z}$ en esta ocasión. Es claro que esta cadena debe terminar en el punto B. Luego podemos obtener un ciclo más grande que comienza en A: primero seguimos $\mathcal{Z}$ desde A hasta B, luego recorremos el ciclo $\mathcal{R}$ y, al regresar a B, recorremos la parte restante de $\mathcal{Z}$ de regreso a A



Si aún no hemos cubierto todo el grafo, podemos extender este camino nuevamente, y así sucesivamente, hasta obtener un ciclo de Euler deseado. □

Un **camino de Euler** es un camino que pasa por todas las aristas del grafo, de modo que cada arista aparece exactamente una vez en el camino.

Problema 3. Encuentra condiciones necesarias y suficientes para que un grafo conexo tenga un camino de Euler.

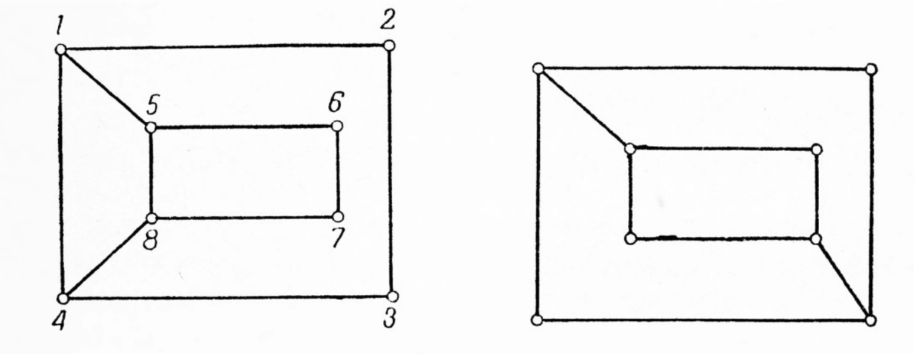
La representación gráfica de un grafo es muy conveniente porque nos ayuda a "visualizarlo". Sin embargo, también podemos pensar en un grafo de forma combinatoria: un grafo G es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto y E es un subconjunto del conjunto $P_2(V)$, donde $P_2(V)$ es el conjunto de subconjuntos de 2 elementos de V. Entonces, V se llama el conjunto de vértices de G y E es su conjunto de aristas. Los grafos que consideramos aquí se llaman **simples** porque sus aristas no están dirigidas y estos grafos no tienen lazos (aristas que salen y llegan al mismo vértice) ni aristas múltiples.

Vamos a decir que dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una biyección $f : V_1 \to V_2$ tal que $f(E_1) = E_2$.

Problema 4. Clasifica salvo isomorfismo todos los grafos conexos con 3 y 4 vértices.

No es siempre fácil determinar si dos grafos no son isomorfos.

Problema 5. Demuestra que estos dos grafos



no son isomorfos.

Problema 6. Encuentra dos grafos que tengan:

- El mismo número de vértices,
- La misma lista de grados de cada vértice. Por ejemplo, si un grafo tiene 2 vértices de grado 1, 3 de grado 4 y 4 de grado 5, el otro también,

y que no sean isomorfos.

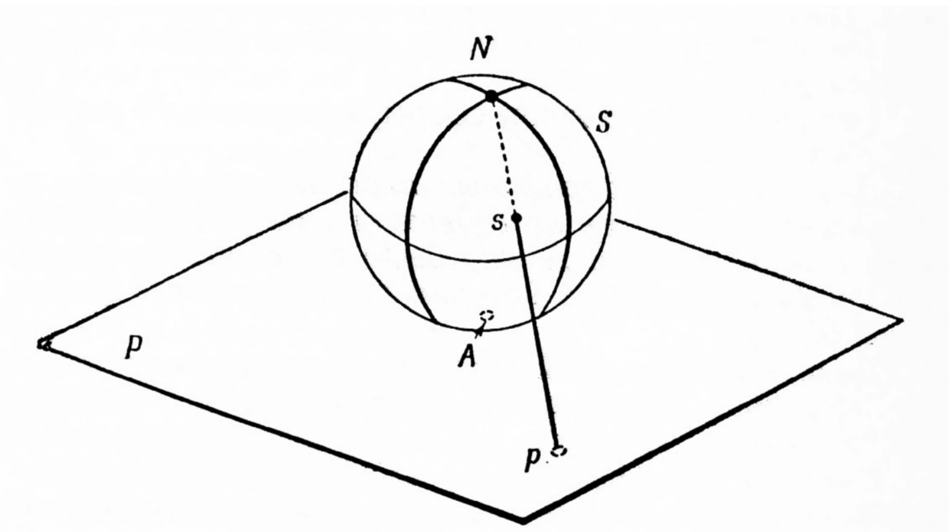
Problema 7. Encuentra dos grafos conexos que tengan todos sus vértices de grado 3, tengan el mismo número de vértices, y no sean isomorfos.

Algunos grafos aparecen frecuntemente en los problemas y merecen tener una notación especial:

Notación	Grafo
N_k	el grafo sin aristas de k vértices
L_k	el grafo de k vértices $\{1, 2, \ldots, k\}$ con aristas $\{i, i+1\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$
C_k	el grafo circular: L_k con una arista adicional $\{1, k\}$
K_k	el grafo completo de k vértices: hay aristas entre todos los vértices
$K_{m,n}$	el grafo completo bipartito de $m + n$ vértices: hay aristas entre los primeros m vértices y todos los n vertices restantes

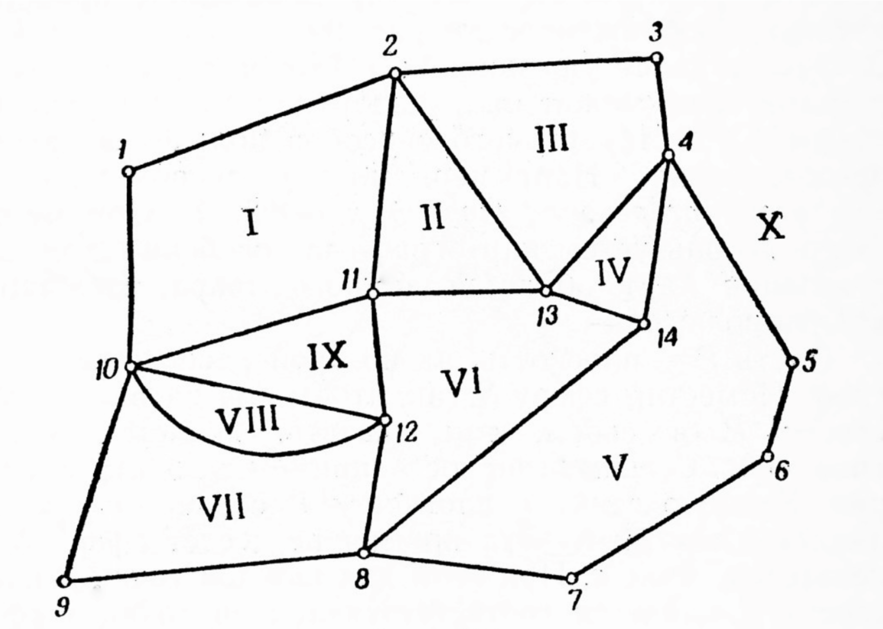
Un grafo **plano** es un grafo que se puede dibujar en un plano de tal manera que sus aristas no tengan puntos de intersección, aparte de los vértices. Se puede ver que $K_{3,3}$ no es un grafo plano. Aunque este resultado parece elemental, su demostración rigurosa es bastante complicado. El grafo K_5 tampoco es plano (lo veremos en los ejercicios).

Un grafo plano también se puede dibujar en una esfera. Existen varias formas de obtener esta representación. Por ejemplo, se puede utilizar la proyección estereográfica. Consideremos una superficie plana P en la que se encuentra nuestro grafo. Colocamos una esfera S de manera que toque la superficie P en su polo sur.



Tomamos el polo norte N como el centro de la proyección. Conectamos cada punto p en la superficie P con la esfera S mediante una línea recta que pasa por el punto N. Esta línea intersectará la esfera S en algún punto s. De esta manera, para cada punto p en la superficie P, hay un punto correspondiente s en la esfera S. La proyección inversa permite llevar cada grafo en la esfera S de vuelta a la superficie que toca la esfera S. El único punto de la esfera S que no tiene un equivalente en la superficie P es el centro de la proyección N.

Ahora vamos a examinar grafos planos conexos que forman redes poligonales en el plano. Esto significa que las aristas del grafo plano G forman un conjunto de polígonos adyacentes entre sí, dividiendo el plano en regiones poligonales, de manera similar a como se muestra en la figura.



Es importante destacar que, al hablar de polígonos, a diferencia del uso común de este término, no asumimos que sus aristas sean necesariamente rectilíneas. Pueden ser cualquier curva continua sin autointersección, dividiendo el plano en regiones individuales. También permitiremos aristas multiples. En el grafo anterior tenemos 2 aristas de tipo $\{10, 12\}$.

Si quitamos el grafo del plano, el plano se divide en varios regiones, que llamaremos **caras**. Además, una de las caras no va a estar acotada. En el caso de esfera todas las caras están acotadas.

Ilustraremos todo esto con el grafo anterior. Este grafo tiene 10 caras numeradas del I al X. Por ejemplo, la cara I tiene como límite un ciclo formado por las aristas $\{1, 2\}, \{2, 11\}, \{11, 10\}, \{10, 1\}$, mientras que la cara $VIII$ está limitada por solo dos aristas que conectan los vértices 10 y 12. La cara infinita es X.

Teorema 2 (La fórmula de Euler para los grafos planos)**.** *Sea G un grafo plano conexo con al menos un vértice, V el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras. Entonces*

$$V - A + C = 2.$$

Proof. Demuestra el teorema por inducción sobre A. □

Problema 8.

1. ¿Cuál es la fórmula de Euler para grafos planos que no son conexos?

2. Comprueba que la fórmula de Euler sigue cierta en una esfera.

3. ¿Cuál es la fórmula de Euler para grafos conexos dibujados en un donuts?

4. ¿Cuál es la fórmula de Euler para grafos conexos dibujados en un donuts con k agujeros (un donuts clásico tiene 1 agujero)?

Problema 9. Tenemos un pequeño tablero de ajedrez 3×3. Las filas están numeradas del 1 al 3, y las columnas de la a a la c, con lo que las casillas se llaman a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3. Hay dos caballos blancos en a1 y a3, y dos caballos negros en c1 y c3. ¿Hay alguna manera de mover los caballos para que acaben los blancos en b1 y b3 y los negros en a2 y c2?

Problema 10. Hay 20 tarjetas, cada una con un número escrito en ambos lados. En cada tarjeta, los números del 1 al 20 están escritos dos veces. Demostrar que las tarjetas se pueden organizar de manera que todos los números en la parte superior sean diferentes.

Problema 11. Un **arbol** es un grafo que no tiene ciclos. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Dado un grafo conexo finito, se puede quitar varias aristas para obtener un árbol.

b) En un árbol con n vértices, hay exactamente $n - 1$ aristas.

c) En un árbol, hay al menos dos vértices de grado 1.

d) En un grafo conexo de n vértices, hay al menos $n - 1$ aristas.

e) Si un grafo conexo tiene n vértices y $n - 1$ aristas, entonces es un árbol.

Problema 12. Decimos que un grafo es **bipartito** si sus vértices se pueden dividir colorear de dos colores, blanco y negro, de manera que no hay ninguna arista que una dos vértices del mismo color. Demuestra que un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ningún ciclo de longitud impar.

Problema 13. Sea G un grafo conexo plano simple sin vertices de grado 1, con $V \geq 1$ vértices, A aristas y C caras. Demuestra que

1. $2A \geq 3C$;
2. $A \leq 3V - 6$;
3. El grafo K_5 no es plano.

Problema 14. En un círculo matemático, cada miembro tiene exactamente un amigo y un enemigo (las relaciones de amistad y enemistad son simétricas). Demostrar que:

a) el número de miembros del círculo es par;

b) el círculo se puede dividir en dos grupos neutrales (tal que no hay amigos y enemigos entre miembros del mismo grupo).

Problema 15. Un camino **hamiltoniano** en un grafo es un camino que pasa por todos los vértices exactamente una vez.

Demostrar que en un grafo con 20 vértices, cada uno con grado no menor de 10, hay un camino hamiltoniano.

Problema 16. Demuestra que un grafo con n vértices, cada uno de grado no menor que $\frac{n-1}{2}$, es conexo.

Problema 17. De un grafo completo de 100 vértices se eliminaron 98 aristas. Demuestra que el grafo resultante sigue siendo conexo.

Problema 18. En un país hay 15 ciudades, algunas de las cuales están conectadas por líneas aéreas operadas por tres aerolíneas. Se sabe que incluso si cualquiera de las aerolíneas deja de operar, aún se puede llegar desde cada ciudad a cualquier otra (quizás con escalas) utilizando los vuelos de las dos aerolíneas restantes. ¿Cuál es el menor número posible de líneas aéreas que puede haber en el país?

Problema 19. En un cierto país, las ciudades están conectadas por carreteras. La longitud de cada carretera mide menos de 500 km, y desde cada ciudad se puede llegar a cualquier otra ciudad conduciendo por carreteras que suman en total menos de 500 km. Cuando una carretera se cerró por reparaciones, resultó que desde cada ciudad se podía llegar a cualquier otra ciudad utilizando las carreteras restantes. Demuestra que en este caso se puede conducir menos de 1500 km.

Problema 20. En un cuadrado se marcan 20 puntos y se conectan con segmentos sin interesecciones entre sí y también con los vértices del cuadrado, de modo que el cuadrado se divide en triángulos. ¿Cuántos triángulos hay?

Problema 21. La distancia entre dos triángulos $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$ es la menor de las distancias A_iB_j ($1 \leq i, j \leq 3$). ¿Es posible dibujar en el plano cinco triángulos de manera que la distancia entre cualquier par de ellos sea igual a la suma de los radios de sus circunferencias circunscritas?

Problema 22. En un reino hay 16 ciudades. El rey quiere construir un sistema de carreteras de tal manera que desde cada ciudad se pueda llegar a cualquier otra, evitando no más de una ciudad intermedia, y que desde cada ciudad no salgan más de cinco carreteras.

a) Demuestra que esto es posible.

b) Demuestra que si se reemplaza el número 5 por el número 4 en la formulación, el deseo del rey será imposible de cumplir.

Problema 23. Un cubo de lado de longitud n se divide en n^3 cubos unitarios. ¿Cuál es el número mínimo de caras (cuadrados de lado 1) de cubos unitarios hay que eliminar para que desde todos los puntos del cubo se pueda llegar al borde sin atravesar ninguna cara?

Problema 24. Un grafo **bipartito** es un grafo G simple cuyos vertices se puede dividir en dos grupos X e Y de tal forma que no hay aristas entre los vértices de cada grupo.

1. Consideremos una baraja de cartas estándar de 52 cartas. Repartimos las cartas en 13 pilas de 4 cada una. Demuestra que es posible seleccionar exactamente una carta de cada pila, de modo que las 13 cartas seleccionadas contengan exactamente una carta de cada rango (As, 2, 3,. . . , Reina, Rey).

   Ayuda: usa el **Teorema de Hall:** Si en un grafo bipartito con dos partes X e Y para cualquier número natural k, cada conjunto de k vértices en X está conectado al menos con k vértices en Y, entonces existe una función injectiva $\alpha : X \to Y$ tal que para cada $x \in X$, x y $\alpha(x)$ están conectadas por una arista.

2. Demuestra el teorema de Hall.

3. Olga tiene un mazo de 36 cartas (4 palos con 9 cartas en cada uno). Ella selecciona la mitad de las cartas como desee y se las da a Roberto, conservando la otra mitad para sí misma. Luego, en cada turno, los jugadores revelan una carta de su elección de sus respectivas mitades (el oponente ve el palo y el valor de la carta revelada), comenzando por Olga. Si en respuesta al movimiento de Olga, Roberto puede colocar una carta del mismo palo o valor, Roberto gana un punto. ¿Cuál es la cantidad máxima de puntos que Roberto puede garantizar ganar?

Problema 25. En la Cena de los Dramáticos hay $2n$ invitados. Cada dramático tiene como mucho $n-1$ enemigos. Demuestra que los dramáticos se pueden sentar en una mesa redonda, de manera que nadie está sentado al lado de un enemigo. (Si A es enemigo de B, B es enemigo de A)

Problema 26. Una compañía de teatro está poniendo en marcha una obra y necesita asignar a cada uno de sus n actores uno de los n papeles diferentes, y $n \geq 2$. Cada uno de los actores elige dos papeles que le gustaría interpretar, y sabemos que cada papel es elegido por dos actores. Si cada papel se tiene que asignar a un actor que lo eligió, demuestra que el número de maneras en las que la compañía de teatro puede asignar los papeles es una potencia de 2.