Pequeño Instituto de Matemáticas
2023 2024

Fecha: 12, 19 y 26 de enero de 2024 **Grupos Marte y Neptuno**

Combinatoria

La combinatoria es el arte de contar. Averiguar cuántos objetos se ajustan a determinadas características puede no ser fácil. En esta hoja presentamos ideas y conceptos básicos de combinatoria. Estos conceptos nuevos se van a exponer en una serie de ejemplos resueltos y ejercicios al principio de la hoja, así que **es muy importante que leáis la hoja en orden de aquí hasta el bloque gris que hay después del Problema 6, leyendo y entendiendo las soluciones a todos los ejemplos resueltos y resolviendo todos los ejercicios en orden.** Si os atascáis en cualquier cosa, pedid ayuda a vuestros compañeros o a vuestros profesores, pero no avancéis sin haber entendido lo anterior.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se puede formar con un alfabeto de 27 letras? Las palabras no tienen por qué significar nada en ningún idioma, por "palabra" vamos a entender una lista ordenada de letras.

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 27 posibilidades para escoger la segunda letra y teniendo dos letras hay 27 posibilidades para elegir la última letra. Por lo tanto, hay $27 \cdot 27 \cdot 27 = 19683$ palabras de tres letras en un alfabeto de 27 letras. □

En este ejemplo hemos usado la **la regla de producto**:

Regla de producto: Si un objeto A se puede escoger de m maneras y después de cada elección de este tipo, un objeto B se puede escoger de n maneras, entonces se puede escoger una pareja (A, B) de $m \cdot n$ maneras.

En el ejemplo anterior los objetos que teníamos que elegir eran letras, las elegíamos en orden, y cada para cada uno que elegíamos teníamos 27 posibilidades. Veamos un ejemplo un poco distinto en el que también se aplica la regla del producto.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se puede formar con un alfabeto de 27 letras, si imponemos que todas las letras de la palabra tienen que ser distintas?

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 26 posibilidades para escoger la segunda letra (porque no podemos repetir letras) y teniendo dos letras hay 25 posibilidades para elegir la última letra. Por lo tanto, la regla del producto nos da que hay $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550$ palabras de tres letras sin ninguna letra repetida en un alfabeto de 27 letras. □

Problema 1. ¿De cuántas maneras distintas puedes poner a 18 alumnos en fila? ¿Y a 100 alumnos?

Vamos a explicar una notación nueva para que sea más fácil escribir la respuesta de problemas como el ejercicio anterior.

El factorial de un número: Si n es un número entero positivo, entonces llamamos "**n factorial**" (y lo denotamos por **n**!) al número

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

También diremos que $0! = 1$, aunque no se ajuste a la definición que acabamos de dar.

Con esta definición en mente, completa las siguiente frases, en las que $n \geq k \geq 1$:

- El número de formas distintas de poner a n alumnos distintos en fila es ______________.
- El número de palabras distintas de k letras en las que todas las letras son distintas que se pueden formar con un alfabeto de n letras es ______________________________________.
  Este número se puede expresar como una fracción usando factoriales de la siguiente manera:

  ____

Antes de continuar con la hoja, asegúrate de que tus respuestas en el bloque gris anterior son correctas preguntándole a uno de los profesores.

Las preguntas que hemos hecho hasta ahora tenían en cuenta el orden. Por ejemplo, las palabra de tres letras "res", "ser" y "ers" son tres palabras distintas, a pesar de estar formadas por las mismas tres letras. Veamos un ejemplo de una pregunta parecida en la que no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Adrián tiene un total de 15 camisetas, y se va a ir de vacaciones. Quiere meter en la maleta un total de 7 camisetas. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Solución. Aquí no nos importa el orden en el que escogemos las camisetas, sino cuáles escogemos. Tenemos que escoger 7 camisetas de entre 15. Si nos importara el orden, tendríamos 15 posibilidades para la primera camiseta, 14 para la segunda... así hasta $15 - 7 + 1 = 9$ posibilidades para la séptima. Por tanto, si nos importara el orden, la respuesta sería

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15!}{8!}.$$

Sin embargo, como no nos importa el orden, hay varias de estas elecciones (en la que importa el orden de las camisetas) que nos dan lugar a la misma elección de 7 camisetas. Más concretamente, para cada elección de 7 camisetas, hay 7! maneras de ponerlas en fila, por lo que cada elección de 7 camisetas la estamos contando 7! veces distintas en el cálculo de $\frac{15!}{8!}$. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{\frac{15!}{8!}}{7!} = \frac{15!}{7!8!} = 6435.$$

□

Problema 2. Un profesor de educación física tiene que dividir a una clase de 26 alumnos en dos grupos de 13 alumnos para jugar al pañuelo. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Problema 3. Repite el razonamiento de la solución del ejemplo resuelto anterior para justificar que el número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Como el ejercicio anterior lo vamos a usar muchísimo, vamos a darle un nombre a su respuesta:

Números combinatorios $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$: Si n es un número entero positivo, y k es un número entero tal que $0 \leq k \leq n$, llamamos "**las combinaciones de n en k**" (y lo denotamos por $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$) al número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por el Problema 3, el número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\binom{n}{k}$.

Si $k = 0$ esta fórmula también tiene sentido, ya que el número de maneras de escoger 0 elementos de entre n es 1 (hay una manera, no escoger nada), y

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Problema 4. En este ejercicio, una palabra es una lista ordenada de letras sin espacios entre medio. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas palabras distintas de siete letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *NUMEROS*?

b) ¿Cuántas palabras distintas de once letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *MATEMATICAS*? Date cuenta de que algunas letras están repetidas.

c) ¿De cuántas maneras puedes formar dos palabras, una de tres letras y otra de dos, usando las letras de la palabra *NUMERITOS* sin repetir ninguna letra?

Problema 5. En un juego de domino estándar hay 28 fichas de dominó, y los valores indicados en las fichas van del 0 al 6. ¿Cuántas fichas contendría un juego de dominó si los valores indicados en las fichas fuesen de 0 a 12?

Ahora vamos a ver un ejemplo en el que hay repeticiones (como en el Problema 4 parte b), pero, que a diferencia del Problema 4 parte b, no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Pablo tiene camisetas en tres colores distintos: 15 rojas, 7 verdes y 6 azules. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir 6 camisetas, si las camisetas del mismo color son indistinguibles entre sí?

Solución. Vamos a representar las camisetas por puntos ($\bullet$) y los cambios de color por barras ($|$), poniendo las camisetas en el siguiente orden de colores: rojo, verde, azul. Así, la secuencia

$$\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet$$

corresponde a 2 camisetas rojas, 3 verdes y 1 azul, y la secuencia

$$\mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet$$

corresponde a 0 camisetas rojas, 2 verdes y 4 azules.

El dato de que Pablo tiene 15 camisetas rojas, 7 verdes y 6 azules sólo nos sirve para darnos cuenta que cualquier fila de 6 puntos y dos barras se corresponde con una elección de camisetas posible para Pablo. Así, contar el número de maneras de escoger 6 camisetas equivale al número de maneras de colocar 6 puntos en 8 huecos de una fila, que es $\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$. □

Siguiendo un razonamiento parecido usando puntos y barras, responde al siguiente problema.

Problema 6. En una pastelería hay 4 tipos de pasteles. ¿Cuántas cajas distintas de 7 pasteles se puede formar?

El ejercicio anterior se puede interpretar como que nos están preguntando la manera de repartir 7 elementos iguales en 4 grupos distintos (cada uno de los 7 elementos es un pastel, y los grupos corresponden al tipo de pastel). Con esto en mente, completa la siguiente frase:

> El número de formas distintas de poner a n elementos idénticos en k grupos distintos es
>
> ____________________________________.

Muchos de los problemas de esta hoja se pueden resolver aplicando los conceptos explicados hasta ahora, así que **asegúrate de haber entendido todos los ejercicios anteriores bien antes de continuar**, y si no pide ayuda a tus compañeros o a tus profesores. Tu grupo puede resolver los demás problemas de la hoja en el orden que queráis, aunque siempre recomendamos ir en orden.

Problema 7. El plano de una ciudad es un rectángulo de 5 por 10 celdas. Se ha introducido el tráfico de un solo sentido en las calles: sólo se permite conducir hacia la derecha y hacia arriba. ¿Cuántas rutas diferentes hay desde la esquina de abajo a la izquierda hasta la esquina de arriba a la derecha?

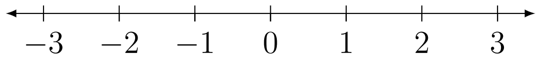
Problema 8. En una calle hay cinco casas seguidas. Queremos pintarlas todas de rojo o de verde. ¿Cuántas maneras hay de pintarlas?

Si no puede haber dos casas seguidas rojas, ¿de cuántas maneras podemos pintar las casas?

Problema 9. ¿De cuántas maneras se pueden colocar tres torres en un tablero de ajedrez 8×8 tal que todas las torres están en columnas diferentes y filas diferentes?

Problema 10. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay de que 5 chicos y 5 chicas se sienten de forma alternada en una mesa redonda que tiene 10 sillas? Dos maneras de sentarse que difieren en una rotación se consideran iguales.

Problema 11. La rana Gustavo salta a lo largo de la recta



y empieza en el 0. Cada vez que salta, salta una unidad a la izquierda o una a la derecha. Por ejemplo, una sucesión de posibles saltos para Gustavo sería $0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 2$. ¿De cuántas maneras puede dar exactamente 10 saltos empezando en el 0 y aterrizar en un número primo (positivo o negativo)?

Problema 12. ¿De cuántas maneras se pueden escribir todos los números del 1 al 9 en las celdas de un tablero 3×3 de manera que para todos los números enteros $1 \leq n < 9$, la celda que contiene al número n tiene un lado en común con la que contiene al número $n+1$?

Problema 13. Queremos distribuir 12 piedras idénticas entre 4 cajas diferentes entre sí, que llamamos B_1, B_2, B_3 y B_4. Se permite que algunas cajas queden vacías.

a) Entre todas las maneras de distribuir las piedras, ¿qué fracción del total tiene la propiedad de que el número de piedras en todas las cajas es par?

b) Entre todas las maneras de distribuir las piedras, ¿qué fracción del total tiene la propiedad de que el número de piedras en todas las cajas es impar?

Problema 14. a) Sean n y k números enteros positivos. Si tenemos nk objetos distintos, ¿de cuántas maneras podemos dividirlos en k grupos de n objetos cada uno si no nos importa el orden de los grupos ni el orden de los objetos dentro de su grupo?

b) ¿Cuál es el número entero positivo más pequeño para el cual $\frac{(20n)!}{(n!)^{21}}$ no es un número entero?

Problema 15. ¿Cuál es el número mínimo de casillas deben marcarse en un tablero de tamaño 15×15 para que un alfil de ajedrez ataque al menos dos casillas marcadas desde cualquier casilla del tablero ? (El alfil también ataca la casilla en la que se encuentra).

Problema 16. Un cuadrado $(n-1) \times (n-1)$ se divide en $(n-1)^2$ cuadrados unidad de la forma usual. Cada uno de los n^2 vértices de esos cuadrados se colorean de color azul o rojo. Hallar el número de coloraciones distintas de manera que cada cuadrado unidad tenga exactamente dos vértices de color rojo. (Dos coloraciones se dicen distintas si tienen al menos un vértice coloreado de forma distinta.)

Problema 17. En una cuidad, la red de rutas de autobuses está configurada de la siguiente manera:

1. Cada ruta tiene exactamente tres paradas.

2. Cada par de rutas tiene o bien ninguna parada en común o solo una parada en común.

¿Cuál es el número máximo de rutas que puede haber en esta cuidad si hay un total de 9 paradas?

Problema 18. En un círculo se colocan 10 pesas de hierro. Entre cada par de pesas adyacentes, hay una bola de bronce. La masa de cada bola es igual a la diferencia de masas entre las pesas adyacentes a ella. Demuestra que se puede distribuir las bolas en dos platillos de una balanza de manera que los platillos queden equilibrados.

Problema 19. Un polígono convexo de n lados tiene todas sus diagonales dibujadas y no hay tres diagonales que se corten en un punto del interior del polígono. Encuentra una fórmula para el número de regiones formadas dentro del polígono.

Problema 20. Encuentra el número de pares ordenados (a, b) de números enteros positivos tales que a y b son ambos divisores de 20^{19}, pero ab no lo es.