Pequeño Instituto de Matemáticas
2023 2024

Fecha: 12, 19 y 26 de enero de 2024 **Grupos Marte y Neptuno**

Combinatoria

La combinatoria es el arte de contar. Averiguar cuántos objetos se ajustan a determinadas características puede no ser fácil. En esta hoja presentamos ideas y conceptos básicos de combinatoria. Estos conceptos nuevos se van a exponer en una serie de ejemplos resueltos y ejercicios al principio de la hoja, así que **es muy importante que leáis la hoja en orden de aquí hasta el bloque gris que hay después del Problema 6, leyendo y entendiendo las soluciones a todos los ejemplos resueltos y resolviendo todos los ejercicios en orden.** Si os atascáis en cualquier cosa, pedid ayuda a vuestros compañeros o a vuestros profesores, pero no avancéis sin haber entendido lo anterior.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se puede formar con un alfabeto de 27 letras? Las palabras no tienen por qué significar nada en ningún idioma, por "palabra" vamos a entender una lista ordenada de letras.

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 27 posibilidades para escoger la segunda letra y teniendo dos letras hay 27 posibilidades para elegir la última letra. Por lo tanto, hay $27 \cdot 27 \cdot 27 = 19683$ palabras de tres letras en un alfabeto de 27 letras. $\square$

En este ejemplo hemos usado la **la regla de producto**:

Regla de producto: Si un objeto A se puede escoger de m maneras y después de cada elección de este tipo, un objeto B se puede escoger de n maneras, entonces se puede escoger una pareja (A, B) de $m \cdot n$ maneras.

En el ejemplo anterior los objetos que teníamos que elegir eran letras, las elegíamos en orden, y cada para cada uno que elegíamos teníamos 27 posibilidades. Veamos un ejemplo un poco distinto en el que también se aplica la regla del producto.

Ejemplo resuelto. ¿Cuántas palabras de tres letras se puede formar con un alfabeto de 27 letras, si imponemos que todas las letras de la palabra tienen que ser distintas?

Solución. Una palabra de tres letras $L_1L_2L_3$ es una lista de tres letras. Para escoger la primera letra hay 27 posibilidades, después de escoger la primera letra hay 26 posibilidades para escoger la segunda letra (porque no podemos repetir letras) y teniendo dos letras hay 25 posibilidades para elegir la última letra. Por lo tanto, la regla del producto nos da que hay $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550$ palabras de tres letras sin ninguna letra repetida en un alfabeto de 27 letras. $\square$

Problema 1. ¿De cuántas maneras distintas puedes poner a 18 alumnos en fila? ¿Y a 100 alumnos?

Solución. Para poner a 18 alumnos en fila, hay 18 posibilidades para el primero, 17 para el segundo, 16 para el tercero... así hasta una posibilidad para el último. La regla del producto nos dice que la respuesta es

$$18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Este número es demasiado grande como para escribirlo. Para 100 alumnos, el mismo argumento nos dice que la respuesta es

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$\square$

Vamos a explicar una notación nueva para que sea más fácil escribir la respuesta de problemas como el ejercicio anterior.

El factorial de un número: Si n es un número entero positivo, entonces llamamos "**n factorial**" (y lo denotamos por **n**!) al número

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

También diremos que $0! = 1$, aunque no se ajuste a la definición que acabamos de dar.

Con esta definición en mente, completa las siguiente frases, en las que $n \geq k \geq 1$:

- El número de formas distintas de poner a n alumnos distintos en fila es $n!$.
- El número de palabras distintas de k letras en las que todas las letras son distintas que se pueden formar con un alfabeto de n letras es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Este número se puede expresar como una fracción usando factoriales de la siguiente manera:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Antes de continuar con la hoja, asegúrate de que tus respuestas en el bloque gris anterior son correctas preguntándole a uno de los profesores.

Las preguntas que hemos hecho hasta ahora tenían en cuenta el orden. Por ejemplo, las palabra de tres letras "res", "ser" y "ers" son tres palabras distintas, a pesar de estar formadas por las mismas tres letras. Veamos un ejemplo de una pregunta parecida en la que no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Adrián tiene un total de 15 camisetas, y se va a ir de vacaciones. Quiere meter en la maleta un total de 7 camisetas. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Solución. Aquí no nos importa el orden en el que escogemos las camisetas, sino cuáles escogemos. Tenemos que escoger 7 camisetas de entre 15. Si nos importara el orden, tendríamos 15 posibilidades para la primera camiseta, 14 para la segunda... así hasta $15 - 7 + 1 = 9$ posibilidades para la séptima. Por tanto, si nos importara el orden, la respuesta sería

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15!}{8!}.$$

Sin embargo, como no nos importa el orden, hay varias de estas elecciones (en la que importa el orden de las camisetas) que nos dan lugar a la misma elección de 7 camisetas. Más concretamente, para cada elección de 7 camisetas, hay 7! maneras de ponerlas en fila, por lo que cada elección de 7 camisetas la estamos contando 7! veces distintas en el cálculo de $\frac{15!}{8!}$. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{\frac{15!}{8!}}{7!} = \frac{15!}{7!8!} = 6435.$$

$\square$

Problema 2. Un profesor de educación física tiene que dividir a una clase de 26 alumnos en dos grupos de 13 alumnos para jugar al pañuelo. ¿De cuántas maneras puede hacer esto?

Solución. Lo que tiene que hacer un profesor es elegir a 13 alumnos de entre esos 26 para formar un equipo, y automáticamente los 13 restantes formarán el otro equipo. Argumentando como en el ejemplo anterior de Adrián y las camisetas, vemos que hay

$$\frac{26!}{26-13!} = \frac{26!}{13!}$$

formas en las que el profesor puede escoger a 13 alumnos en orden. Como no le importa el orden de los alumnos a la hora de formar un equipo, tiene que dividir esta cantidad por 13! para obtener que la cantidad de equipos distintos de 13 personas que puede hacer el profesor con sus 26 alumnos es

$$\frac{\frac{26!}{13!}}{13!} = \frac{26!}{13!13!}.$$

Sin embargo, buscamos las maneras que tiene para hacer dos equipos de 13. Por cada equipo de 13 que hace, los 13 restantes forman el otro equipo. Por tanto, cada posibilidad de dos equipos la estamos contando dos veces en la cantidad $\frac{26!}{13!13!}$, y la respuesta final al problema es

$$\frac{\frac{26!}{13!13!}}{2} = \frac{26!}{13!13!2} = 5.200.300$$

□

Problema 3. Repite el razonamiento de la solución del ejemplo resuelto anterior para justificar que el número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Solución. Si nos importara el orden, sabemos por el anterior bloque gris que la respuesta sería $\frac{n!}{(n-k)!}$. Sin embargo, como no nos importa el orden, cada manera de escoger k elementos la estamos contando $k!$ veces (tantas como maneras de poner k elementos en fila). Por tanto, la respuesta es $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

□

Como el ejercicio anterior lo vamos a usar muchísimo, vamos a darle un nombre a su respuesta:

Números combinatorios $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$: Si n es un número entero positivo, y k es un número entero tal que $0 \leq k \leq n$, llamamos "**las combinaciones de n en k**" (y lo denotamos por $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$) al número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por el Problema 3, el número de formas de escoger k elementos de un total de n elementos distintos (sin importar el orden) es $\binom{n}{k}$.

Si $k = 0$ esta fórmula también tiene sentido, ya que el número de maneras de escoger 0 elementos de entre n es 1 (hay una manera, no escoger nada), y

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Problema 4. En este ejercicio, una palabra es una lista ordenada de letras sin espacios entre medio. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas palabras distintas de siete letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *NUMEROS*?

b) ¿Cuántas palabras distintas de once letras se pueden construir con todas las letras de la palabra *MATEMATICAS*? Date cuenta de que algunas letras están repetidas.

c) ¿De cuántas maneras puedes formar dos palabras, una de tres letras y otra de dos, usando las letras de la palabra *NUMERITOS* sin repetir ninguna letra?

Solución. a) La palabra *NUMEROS* tiene 7 letras, todas distintas. Por tanto, nos están perguntando por el número de formas que hay de poner 7 elementos distintos en fila, que es

$$7! = 5040$$

b) Si todas las letras fueran distintas, la respuesta sería 11!. Podemos imaginarnos que lo son, por ejemplo, pintando una M de rojo y otra de azul, una T de rojo y otra de azul, y una A de rojo, otra de azul y otra de verde. Cada posible respuesta de entre las 11! la estamos contando $2! = 2$ veces si pasamos a considerar que las dos M's son idénticas, $2! = 2$ veces si pasamos a considerar que las dos T's son idénticas, y $3! = 6$ veces si pasamos a considerar que las A's son idénticas. Por tanto, la respuesta es

$$\frac{11!}{2!2!3!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.663.200$$

c) La palabra *NUMERITOS* tiene 9 letras, todas ellas distintas. Elegimos las letras en este orden: primero las de la palabra de 3 letras, de la primera a la última, y luego de la palabra de 2 letras, de la primera a la última. Para la primera letra de la palabra de 3 letras hay 9 posibilidades, para la segunda hay 8, para la tercera hay 7. Para la primera letra de la palabra de 2 letras hay 6 posibilidades y para la segunda hay 5. Por tanto, la regla del producto nos dice que la respuesta es

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$$

□

Problema 5. En un juego de domino estándar hay 28 fichas de dominó, y los valores indicados en las fichas van del 0 al 6. ¿Cuántas fichas contendría un juego de dominó si los valores indicados en las fichas fuesen de 0 a 12?

Solución. En tal juego habría 13 “dobles”. El número total de las otras fichas es igual al número de pares de 13 números, es decir, $\binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$. Por lo tanto en total habría $78 + 13 = 91$ fichas. □

Ahora vamos a ver un ejemplo en el que hay repeticiones (como en el Problema 4 parte 4), pero, que a diferencia del Problema 4 parte 4, no importa el orden.

Ejemplo resuelto. Pablo tiene camisetas en tres colores distintos: 15 rojas, 7 verdes y 6 azules. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir 6 camisetas, si las camisetas del mismo color son indistinguibles entre sí?

Solución. Vamos a representar las camisetas por puntos ($\bullet$) y los cambios de color por barras ($|$), poniendo las camisetas en el siguiente orden de colores: rojo, verde, azul. Así, la secuencia

$$\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet$$

corresponde a 2 camisetas rojas, 3 verdes y 1 azul, y la secuencia

$$\mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet$$

corresponde a 0 camisetas rojas, 2 verdes y 4 azules.

El dato de que Pablo tiene 15 camisetas rojas, 7 verdes y 6 azules sólo nos sirve para darnos cuenta que cualquier fila de 6 puntos y dos barras se corresponde con una elección de camisetas posible para Pablo. Así, contar el número de maneras de escoger 6 camisetas equivale al número de maneras de colocar 6 puntos en 8 huecos de una fila, que es $\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$. □

Siguiendo un razonamiento parecido usando puntos y barras, responde al siguiente problema.

Problema 6. En una pastelería hay 4 tipos de pasteles. ¿Cuántas cajas distintas de 7 pasteles se puede formar?

Solución. Los 4 tipos de pasteles los distinguimos mediante 3 barras separadoras, y los 7 pasteles los representamos por puntos. De una fila de $10 = 3 + 7$ tenemos que elegir los 7 huecos donde va a haber puntos (pasteles), y el resto serán barras. Por tanto, la respuesta es

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

□

El ejercicio anterior se puede interpretar como que nos están preguntando la manera de repartir 7 elementos iguales en 4 grupos distintos (cada uno de los 7 elementos es un pastel, y los grupos corresponden al tipo de pastel). Con esto en mente, completa la siguiente frase:

> El número de formas distintas de poner a n elementos idénticos en k grupos distintos es
>
> $$\underline{\binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}}.$$

Muchos de los problemas de esta hoja se pueden resolver aplicando los conceptos explicados hasta ahora, así que **asegúrate de haber entendido todos los ejercicios anteriores bien antes de continuar**, y si no pide ayuda a tus compañeros o a tus profesores. Tu grupo puede resolver los demás problemas de la hoja en el orden que queráis, aunque siempre recomendamos ir en orden.

Problema 7. El plano de una ciudad es un rectángulo de 5 por 10 celdas. Se ha introducido el tráfico de un solo sentido en las calles: sólo se permite conducir hacia la derecha y hacia arriba. ¿Cuántas rutas diferentes hay desde la esquina de abajo a la izquierda hasta la esquina de arriba a la derecha?

Solución. A cada ruta se puede asociar una cadena de 15 letras "D" (derecha) y " A" (arriba). Notemos que debe haber exactamente 5 letras "D" y exactamente 10 letras "A". Por lo tanto, el número de rutas es igual al número de dichas cadenas, que, a su vez, es igual a $\binom{15}{5} = \binom{15}{10} = 3003$. □

Problema 8. En una calle hay cinco casas seguidas. Queremos pintarlas todas de rojo o de verde. ¿Cuántas maneras hay de pintarlas?

Si no puede haber dos casas seguidas rojas, ¿de cuántas maneras podemos pintar las casas?

Solución. La respuesta a la primera pregunta es $2^5 = 32$ maneras.

Para la segunda pregunta, analizamos casos distintos según el número de casas rojas.

- Si no hay ninguna casa roja, hay una manera de pintarlas (todas verdes)
- Si solo hay una casa roja, hay cinco maneras de pintarlas (tantas como maneras de elegir la casa que vas a pintar de rojo).
- Si hay dos casas rojas, pueden ser la 1 y la 3, la 1 y la 4, la 1 y la 5, la 2 y la 4, la 2 y la 5, y la 3 y la 5. En total, hay 6 maneras.
- Si hay tres casas rojas, sólo pueden ser la 1, la 3 y la 5.

Por tanto, en total hay $1 + 5 + 6 + 1 = 13$ maneras de pintarlas. □

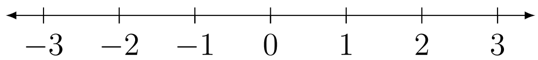
Problema 9. ¿De cuántas maneras se pueden colocar tres torres en un tablero de ajedrez 8×8 tal que todas las torres están en columnas diferentes y filas diferentes?

Solución. Hay $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ maneras de elegir tres filas de entre 8 posibles. Una vez hemos elegido las 3 filas, hay 8 maneras de elegir la posición de la torre en la fila de más arriba (dentro de las tres filas elegidas), 7 en la de en medio, y 6 en la fila de más abajo. Por tanto, la respuesta es $56 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 18816$ maneras. □

Problema 10. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay de que 5 chicos y 5 chicas se sienten de forma alternada en una mesa redonda que tiene 10 sillas? Dos maneras de sentarse que difieren en una rotación se consideran iguales.

Solución. Primero fijemos 5 sillas para las chicas y 5 para los chicos. Hay $(5!)^2$ maneras de colocar a las chicas y chicos en estas sillas. Notemos que hay 5 maneras diferentes de colocación que se obtienen al rotar a las chicas y chicos. La respuesta es $\frac{(5!)^2}{5} = 2880$. □

Problema 11. La rana Gustavo salta a lo largo de la recta



y empieza en el 0. Cada vez que salta, salta una unidad a la izquierda o una a la derecha. Por ejemplo, una sucesión de posibles saltos para Gustavo sería $0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 2$. ¿De cuántas maneras puede dar exactamente 10 saltos empezando en el 0 y aterrizar en un número primo (positivo o negativo)?

Solución. Cada vez que salta, se suma o resta 1, así que si estaba en un número par, pasa a un impar, y viceversa. Como empieza en el 0, tras 10 saltos estará en un número par, así que para que sea primo, sólo puede ocurrir que aterrice en 2 o en -2.

Para aterrizar en 2, tiene que dar 6 saltos a la derecha y 4 a la izquierda, así que hay $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$ maneras. Por la simetría del problema, para aterrizar en -2 también hay 210 maneras. Por tanto, hay 420 maneras en total. □

Problema 12. ¿De cuántas maneras se pueden escribir todos los números del 1 al 9 en las celdas de un tablero 3×3 de manera que para todos los números enteros $1 \leq n < 9$, la celda que contiene al número n tiene un lado en común con la que contiene al número $n + 1$?

Solución. Coloreamos el tablero como un tablero de ajedrez en blanco y negro, con las celdas de las esquinas y la celda del centro en negro. Entre los números del 1 al 9 hay cinco impares y cuatro pares. Como los números impares y pares tienen que estar en colores distintos, los números impares están en las celdas negras y los pares en las blancas.

Si la celda del centro es un 1, hay cuatro posibilidades para poner el 2, dos para poner el 3, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 9, hay cuatro posibilidades para poner el 8, dos para poner el 7, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 3, hay cuatro posibilidades para poner el 2, dos para poner el 1, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 7, hay cuatro posibilidades para poner el 8, dos para poner el 9, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

Si la celda del centro es un 5, hay cuatro posibilidades para poner el 6, dos para poner el 7, y a partir de allí la posición de todos los números está determinada.

En total, hay $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ posibilidades.

□

Problema 13. Queremos distribuir 12 piedras idénticas entre 4 cajas diferentes entre sí, que llamamos B_1, B_2, B_3 y B_4. Se permite que algunas cajas queden vacías.

a) Entre todas las maneras de distribuir las piedras, ¿qué fracción del total tiene la propiedad de que el número de piedras en todas las cajas es par?

b) Entre todas las maneras de distribuir las piedras, ¿qué fracción del total tiene la propiedad de que el número de piedras en todas las cajas es impar?

Solución. El número total de maneras de repartir las piedras coincide con el número de maneras de ordenar 12 puntos idénticos (que representan las piedras) y 3 barras idénticas (la primera barra representa la división entre B_1 y B_2, la segunda representa la división entre B_2 y B_3 y la tercera representa la división entre B_3 y B_4). Así, $\cdots \,||\, \cdots\cdots \,|\, \cdots\cdot$ se corresponde con poner 3 piedras en B_1, 0 en B_2, 5 en B_3 y 4 en B_4. El número de maneras de ordenar las barras y los puntos corresponde a las maneras de escoger 3 elementos de una fila de $12 + 3 = 15$ posibles (es decir, escoger dónde van las barras, porque el resto los llenaremos con puntos). Por tanto, el número total de maneras de repartir las piedras en las 4 cajas es $\binom{15}{3}$.

a) El número total de maneras de distribuir las 12 piedras en las 4 cajas de manera que cada caja tenga un número par de elementos coincide con el número total de maneras de distribuir 6 piedras idéndicas en 4 cajas distintas (luego multiplicamos las piedras de cada caja por 2). Siguiendo el argumento anterior, este número es $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3}$. Por tanto, la respuesta a esta pregunta es

$$\frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{9!}{3!6!}}{\frac{15!}{3!12!}} = \frac{9!}{6!}\frac{12!}{15!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{1}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{12}{65}.$$

b) El número total de maneras de distribuir las 12 piedras en las 4 cajas de manera que cada caja tenga un número impar de elementos coincide con el número total de maneras de asignar 1 piedra a cada caja, y luego distribuir las 8 piedras restantes de manera que se asignen un número par de piedras a cada caja. Por el apartado anterior, esto coincide con el número de maneras de distribuir 4 piedras idénticas en 4 cajas, que es $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3}$. Por tanto, la respuesta a esta pregunta es

$$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{7!}{3!4!}}{\frac{15!}{3!12!}} = \frac{7!}{4!}\frac{12!}{15!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{1}{13}.$$

□

Problema 14. a) Sean n y k números enteros positivos. Si tenemos nk objetos distintos, ¿de cuántas maneras podemos dividirlos en k grupos de n objetos cada uno si no nos importa el orden de los grupos ni el orden de los objetos dentro de su grupo?

b) ¿Cuál es el número entero positivo más pequeño para el cual $\frac{(20n)!}{(n!)^{21}}$ no es un número entero?

Solución. a) Hay $(nk)!$ maneras de poner los nk objetos en fila. Una vez puestos en fila, hacemos los grupos así: Los n primeros forman el primer grupo, los siguientes n el segundo grupo, etc. De las $(nk)!$ maneras de ponerlos en fila, $n!$ corresponderan al mismo k-ésimo grupo, para todo $k = 1, 2, \ldots, k$. Por tanto, si los grupos están numerados, hay $\frac{(nk)!}{(n!)^k}$ maneras. Además, si no nos importa el orden, tendremos que dividir esta cantidad por las $k!$ maneras que hay de ordenar los k grupos. Por tanto, la respuesta que buscamos es

$$\frac{(nk)!}{k! \cdot (n!)^k}.$$

b) Por el apartado anterior, sabemos que $\frac{(20n)!}{20! \cdot (n!)^{20}}$ es el número de maneras de dividir $20n$ objetos en 20 grupos, por lo que este número es un entero. Además, nos damos cuenta de que si $n \leq 20$, entonces $20! \cdot (n!)^{20}$ es divisible por $(n!)^{21}$, por lo que $\frac{(20n)!}{(n!)^{21}}$ es un entero.

Veamos qué pasa para $n = 21$. Hay 210 números pares entre 1 y $420 = 20 \cdot 21$, de los cuales 105 son múltiplos de 4, de los cuales 52 son múltiplos de 8, de los cuales 26 son múltiplos de 16, de los cuales 13 son múltiplos de 32, de los cuales 6 son múltiplos de 64, de los cuales 3 son múltiplos de 128, de los cuales 1 es múltiplo de 256. Por tanto, la potencia de 2 más alta que divide a 420! es $210 + 105 + 52 + 26 + 13 + 6 + 3 + 1 = 416$. Por otra parte, la potencia de 2 más alta que divide a 21! es $10 + 5 + 2 + 1 = 18$. Como $18 \cdot 21 = 378 < 416$, la potencia de 2 más alta que divide a $(21!)^{21}$ es menor que la que divide a $(20 \cdot 21)!$. Repitiendo este proceso para todos los números primos hasta

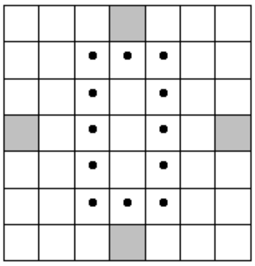
21 (es decir, $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$) se puede ver que $\frac{(20n)!}{(n!)^{21}}$ es un entero si $n = 21$. Análogamente, se puede ver que también es un entero si $n = 22$.

Para $n = 23$, la mayor potencia de 23 que divide a $(23!)^{21}$ es 21. Sin embargo, la mayor potencia de 23 que divide a $(20 \cdot 23)!$ es 20, por lo que la respuesta a este ejercicio es $n = 23$.

□

Problema 15. ¿Cuál es el número mínimo de casillas deben marcarse en un tablero de tamaño 15×15 para que un alfil de ajedrez ataque al menos dos casillas marcadas desde cualquier casilla del tablero ? (El alfil también ataca la casilla en la que se encuentra).

Solución. Es más conveniente resolver el problema en términos generales: mostraremos que en un tablero de dimensiones $(2n + 1) \times (2n + 1)$ $(n > 1)$, la respuesta es $4n$. Por ejemplo, marquemos las casillas en el perímetro del rectángulo $(2n - 1) \times 3$, como se muestra en la figura. (La figura corresponde al caso $n = 3$.)



En las diagonales largas (de más de $n + 1$ casillas), se marcan dos casillas cada una. Solo cuatro casillas del tablero (que están sombreadas en la figura) no están en las diagonales largas, pero el requisito deseado también se cumple para ellas.

Estimación: Coloquemos $8n$ alfiles en todas las casillas del perímetro del tablero. En este caso, cada casilla del tablero es atacada por no más de cuatro alfiles. Dado que cada alfil debe atacar al menos dos casillas marcadas, será necesario marcar al menos $\frac{8n \cdot 2}{4} = 4n$ casillas.

□

Problema 16. Un cuadrado $(n - 1) \times (n - 1)$ se divide en $(n - 1)^2$ cuadrados unidad de la forma usual. Cada uno de los n^2 vértices de esos cuadrados se colorean de color azul o rojo. Hallar el número de coloraciones distintas de manera que cada cuadrado unidad tenga exactamente dos vértices de color rojo. (Dos coloraciones se dicen distintas si tienen al menos un vértice coloreado de forma distinta.)

Solución. Asignemos a los vértices de la fila inferior una coloración arbitraria, y supongamos que dos vértices adyacentes son del mismo color. El número de tales coloraciones es $2^n - 2$. Es fácil comprobar que los colores de los vértices restantes quedan fijados de manera unívoca si queremos que satisfagan la condición del enunciado. Por tanto, en este caso hay $2^n - 2$ coloraciones posibles.

Supongamos ahora que los vértices de la fila inferior se colorean de forma alternada en azul y rojo. Existen dos coloraciones de este tipo. Es este caso, lo mismo sucede para cada fila, y por tanto obtenemos 2^n de tales coloraciones.

En total, el número de coloraciones cumpliendo el enunciado es $(2^n - 2) + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

□

Problema 17. En una cuidad, la red de rutas de autobuses está configurada de la siguiente manera:

1. Cada ruta tiene exactamente tres paradas.

2. Cada par de rutas tiene o bien ninguna parada en común o solo una parada en común.

¿Cuál es el número máximo de rutas que puede haber en esta cuidad si hay un total de 9 paradas?

Solución. Consideremos una parada cualquiera A. Determinemos el número máximo de rutas que pasan por ella. Aparte de A, hay otras 8 paradas en la ciudad. En cada ruta que pasa por A, hay otras dos paradas. Dado que ninguna de estas rutas puede compartir paradas distintas de A, entonces a través de A puede pasar como máximo $8 : 2 = 4$ rutas en total.

Numeremos todas las paradas y denotemos por a_1 la cantidad de rutas que pasan por la primera parada, a_2 la cantidad de rutas que pasan por la segunda parada, y así sucesivamente hasta a_9 que es la cantidad de rutas que pasan por la novena parada. Dado que en cada ruta hay exactamente 3 paradas, entonces

$$a_1 + \ldots + a_9 = 3 \cdot n,$$

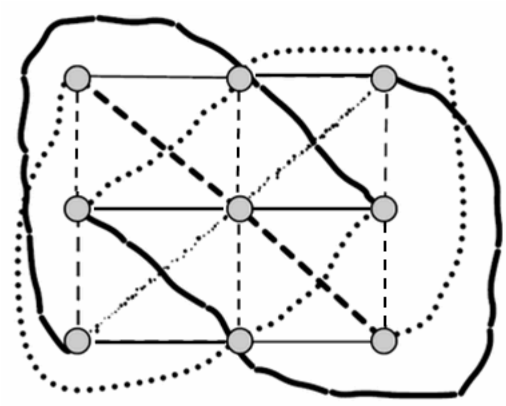
donde n es el número total de rutas.

De acuerdo con lo demostrado anteriormente, cada uno de los términos $a_1, a_2, \ldots, a_9$ es menor o igual a 4. Por lo tanto,

$$3 \cdot n \leq 4 \cdot 9 = 36,$$

lo que significa que $n \leq 12$.

En el dibujo se muestra un esquema que cumple con las condiciones del problema y contiene 12 rutas en total.



$\square$

Problema 18. En un círculo se colocan 10 pesas de hierro. Entre cada par de pesas adyacentes, hay una bola de bronce. La masa de cada bola es igual a la diferencia de masas entre las pesas adyacentes a ella. Demuestra que se puede distribuir las bolas en dos platillos de una balanza de manera que los platillos queden equilibrados.

Solución. Vamos a representar las masas de las pesas como m_i y las masas de las bolas como x_i. Tenemos:

$$(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \ldots + (m_{10} - m_1) = 0,$$

porque cada m_i aparece dos veces en esta suma: una vez con un signo $+$ y otra vez con un signo $-$ y por lo tanto, todos los m_i se cancelarán mutuamente.

Observemos que cada una de las expresiones en paréntesis $m_i - m_{i+1}$ en valor absoluto es igual a la masa de la i-ésima bola. Esto significa que esta igualdad se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_{10} = 0,$$

donde antes de algunos x_i aparece un signo $+$, y antes de los demás aparece un signo $-$. Coloquemos todas las bolas x_i con un signo $+$ en el platillo izquierdo de la balanza, y las demás en el platillo derecho. Es evidente que las balanzas estarán en equilibrio.

$\square$

Problema 19. Un polígono convexo de n lados tiene todas sus diagonales dibujadas y no hay tres diagonales que se corten en un punto del interior del polígono. Encuentra una fórmula para el número de regiones formadas dentro del polígono.

Solución. El número de diagonales es $\binom{n}{2} - n$. Como no hay tres diagonales que se corten en un punto del interior del polígono, el número de intersecciones entre dos diagonales en el interior del polígono es $\binom{n}{4}$, porque cualesquiera cuatro vértices del polígono determinan un único par de diagonales cuyos extremos son esos cuatro vértices e intersecan en su interior.

El polígono empieza teniendo una región. Vamos a imaginarnos que dibujamos las diagonales una a una. Al dibujar una diagonal, se crea una región nueva al salir del vértice (una región nueva por cada diagonal) y cada vez que atraviesa la frontera de una de las regiones existentes (una región nueva por cada intersección entre dos diagonales). Por tanto el número de regiones que se forman es

$$1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$$

□

Problema 20. Encuentra el número de pares ordenados (a, b) de números enteros positivos tales que a y b son ambos divisores de 20^{19}, pero ab no lo es.

Solución. $20^{19} = 2^{38} \cdot 5^{19}$, por lo que n es un divisor de 20^{19} si y solo si $n = 2^x 5^y$, con $0 \leq x \leq 38$ y $0 \leq y \leq 19$ (es decir, hay 39 valores distintos posibles para x y 20 para y). Por tanto, 20^{19} tiene $39 \cdot 20 = 780$ divisores positivos distintos, y esto implica que el número de pares ordenados (a, b) de números enteros positivos tales que a y b son ambos divisores de 20^{19} es $780^2 = 608400$.

El número de pares ordenados (a, b) en los que ab divide a 20^{19} equivale a multiplicar las maneras de poner en orden 38 puntos y 2 barras por las maneras de poner en orden 19 estrellas y 2 barras. Vamos a explicar cómo funciona esta equivalencia:

- El número de puntos antes de la primera barra representa el exponente del 2 en a.
- El número de puntos entre la primera y la segunda barra representa el exponente del 2 en b.
- El número de puntos después de la segunda barra representa el exponente del 2 en $\frac{20^{19}}{ab}$.
- El número de estrellas antes de la primera barra representa el exponente del 5 en a.
- El número de estrellas entre la primera y la segunda barra representa el exponente del 5 en b.
- El número de estrellas después de la segunda barra representa el exponente del 5 en $\frac{20^{19}}{ab}$.

Por tanto, el número de pares ordenados (a, b) en los que ab divide a 20^{19} es

$$\binom{19+2}{2}\binom{38+2}{2} = \frac{21! \cdot 40!}{2!19!2!38!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 39}{4} = 163800,$$

ya que $\binom{19+2}{2}$ son las maneras de elegir en qué posiciones van las barras en una fila de 19 puntos y 2 barras (el resto de posiciones serán ocupadas por puntos), y $\binom{38+2}{2}$ son las maneras de elegir en qué posiciones van las barras en una fila de 38 estrellas y 2 barras (el resto de posiciones serán ocupadas por estrellas). Por tanto, la respuesta a la pregunta es $608400 - 163800 = 444600$.

□