PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

2023-24

1. Utilizando los símbolos matemáticos $+$, $-$, $\cdot$, $:$ y paréntesis obtén el número 2023 con la **menor** cantidad de unos que puedas.

Solución. La respuesta óptima tiene 12 unos:

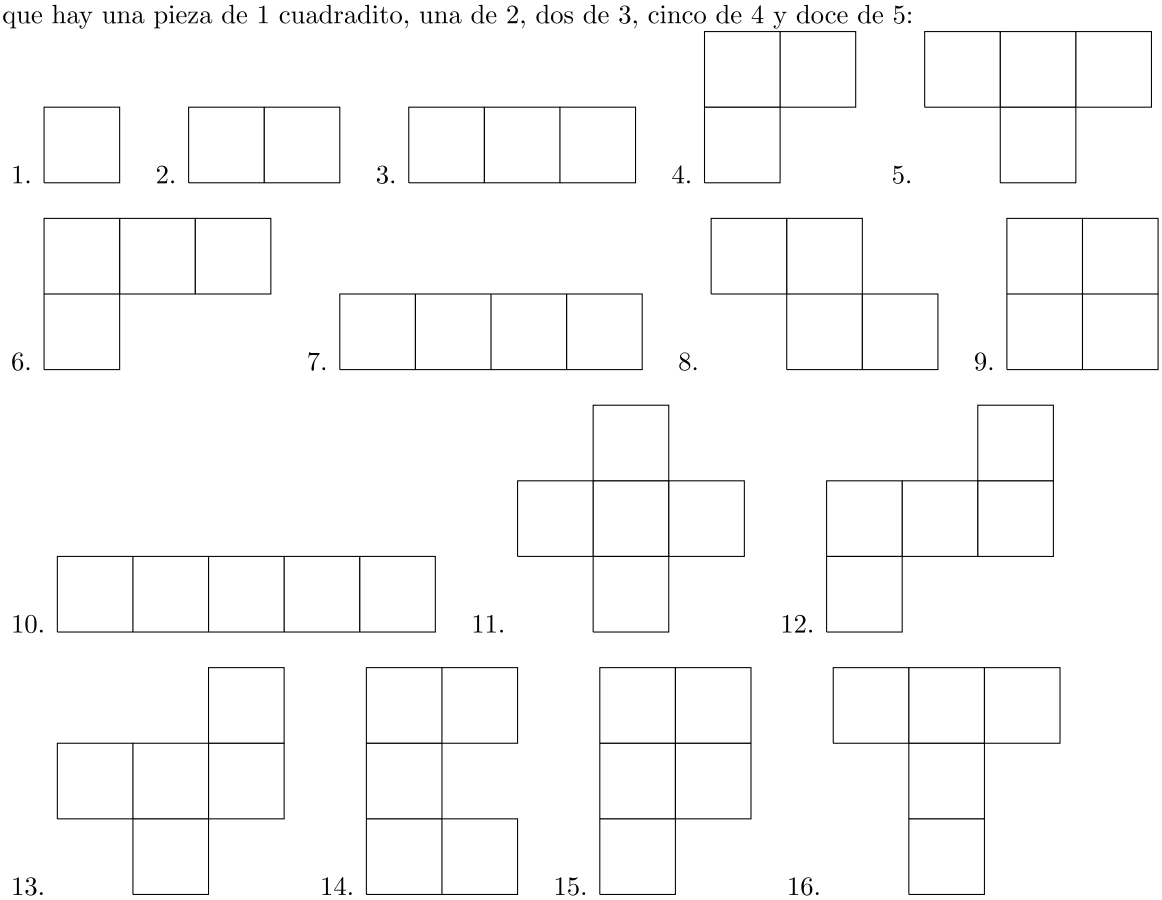
$$1+((1+1)\cdot(1+((11111-1)/11)))=1+\left(2\cdot\left(1+\frac{11110}{11}\right)\right)=1+(2\cdot(1+1010))=1+2022=2023$$

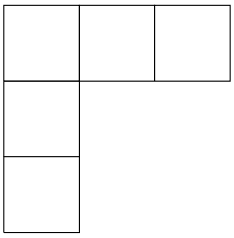
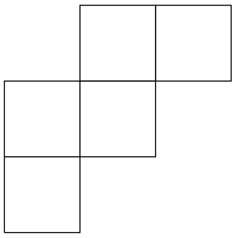
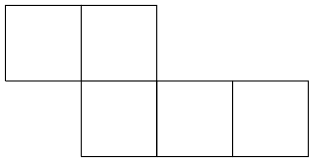
$\square$

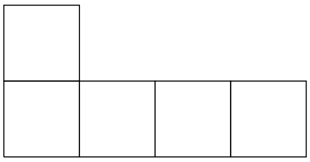
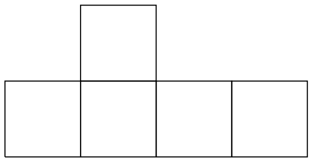
2. Corta un cuadrado de tamaño 9×9 en la **mayor** cantidad de piezas (formadas por cuadrados 1×1) que puedas, de modo que no haya ningún par de piezas idénticas entre ellas (dos piezas se consideran iguales si una puede obtenerse de la otra mediante una combinación de traslaciones, rotaciones y simetrías con respecto a alguna recta).

Solución. La respuesta óptima es 19 piezas.

Empezamos enumerando todas las piezas que hay formadas por 1,2,3,4, y 5 cuadraditos 1×1. En la lista se puede ver que hay una pieza de 1 cuadradito, una de 2, dos de 3, cinco de 4 y doce de 5:

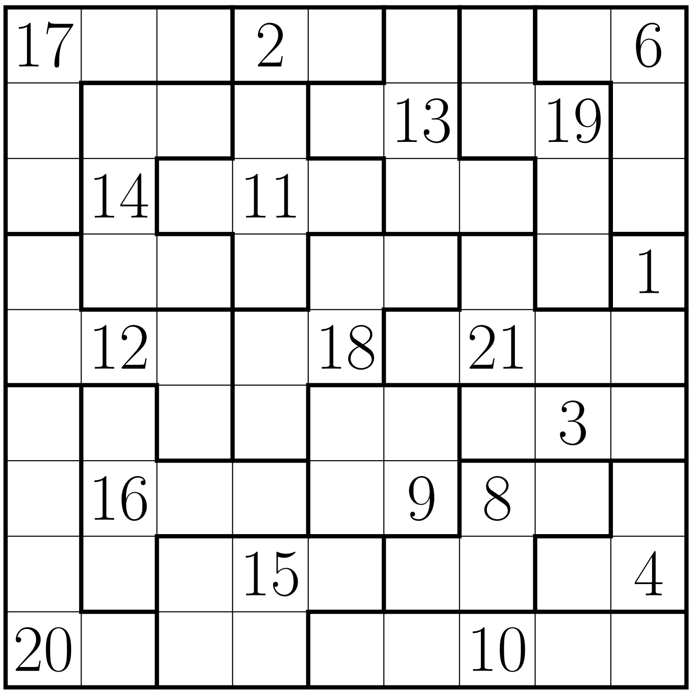


17.  18.  19. 

20.  21. 

En total, todas estas piezas ocupan $1 + 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 89$ cuadraditos. El cuadrado 9×9 consta de 81 cuadraditos. Si conseguimos rellenarlo con todas estas piezas menos dos de 4 cuadraditos tendremos una solución en la que se usan **19 piezas distintas**, y este número de piezas no se podrá mejorar.

Veamos un ejemplo de solución óptima, en el que no se usan las piezas 5 ni 7:



□

3. Construye la cadena más **larga** que puedas de números de dos dígitos de manera que cada número sea divisible por la suma de los dígitos del siguiente y de manera que ningún número de dos dígitos aparezca repetido en la cadena.

Por ejemplo:

$$10, 14, 25, 23.$$

Aquí, 10 es divisible por $1 + 4$, 14 es divisible por $2 + 5$, y 25 es divisible por $2 + 3$. El número 3 se considera que tiene un dígito aunque se escriba como 03.

Solución. La cadena más larga que hemos encontrado tiene 63 términos: 99, 90, 81, 72, 63, 54, 36, 27, 18, 45, 69, 12, 42, 24, 48, 66, 15, 87, 30, 78, 60, 84, 75, 96, 93, 21, 16, 35, 25, 14, 68, 13, 58, 11, 83, 10, 32, 26, 49, 52, 76, 22, 92, 40, 44, 65, 94, 20, 28, 95, 50, 55, 56, 77, 70, 64, 88, 80, 91, 85, 98, 34, 89.

Veamos que nuestra solución es óptima, es decir, que no se puede encontrar una cadena más larga que cumpla las condiciones del enunciado. Una cosa útil para obtener cadenas largas es lo siguiente:

- Si la cadena no empieza por un múltipo de 3, entonces no tiene ningún múltiplo de 3. Hay 30 múltiplos de 3 entre 10 y 99, por lo que no puede haber una cadena más larga que la que hemos dado que no empiece por un múltiplo de 3.

- Si la cadena no empieza por un múltipo de 9, entonces no tiene ningún múltiplo de 9. Todos los múltiplos de 9 entre 10 y 99 aparecen en nuestra cadena (al principio)

Así pues, podemos asumir que la cadena empieza con múltiplos de 9, luego múltiplos de 3, y luego números que no son múltiplos de 3.

Observemos lo siguiente:

1. De este conjunto de 18 primos: 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97, sólo pueden aparecer dos números (uno aparecerá el último de la fila y otro antes del 10), ya que la suma de los dígitos de un número de dos dígitos es como mucho 18. En nuestra cadena aparecen dos de ellos, el 83 y el 89.

2. De este conjunto de 8 números: $38 = 2 \cdot 19$, $46 = 2 \cdot 23$, $58 = 2 \cdot 29$, $62 = 2 \cdot 31$, $74 = 2 \cdot 37$, $82 = 2 \cdot 41$, $86 = 2 \cdot 43$, $94 = 2 \cdot 47$ sólo pueden aparecer dos números en puestos distintos del último y no justo antes que el 10, y lo harán antes del número 20 u 11. En nuestra cadena aparecen dos de ellos, el 58 y el 94.

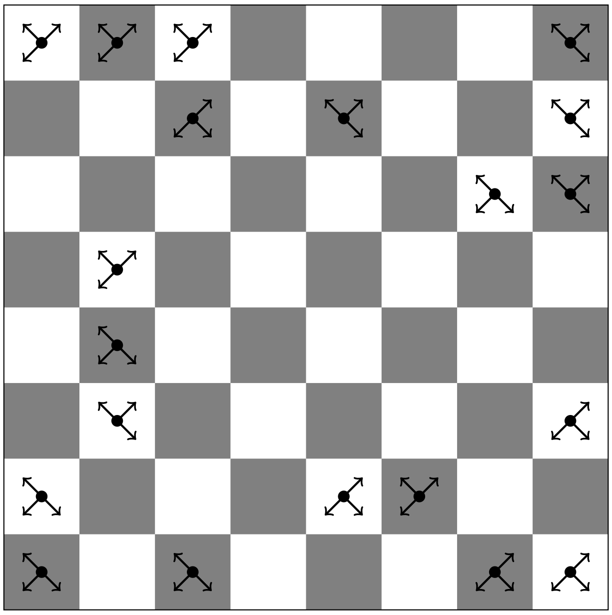
3. En la parte de la cadena que sólo contiene múltiplos de 3 y no de 9, sólo pueden estar 4 números de este conjunto de 8 elementos: $21 = 3 \cdot 7$, $33 = 3 \cdot 11$, $39 = 3 \cdot 13$, $51 = 3 \cdot 17$, $57 = 3 \cdot 19$, $69 = 3 \cdot 23$, $87 = 3 \cdot 39$, $93 = 3 \cdot 31$. En efecto, pueden ser el último de la cadena de múltiplos de 3 o estar precedidos por $12, 21$ o 30. Nuestra cadena contiene exactamente 4 números de este conjunto: $21, 69, 87, 93$.

4. Si la cadena de los múltiplos de tres es lo más larga posible, entonces el último número de esta parte de la cadena no es múltiplo de 8. Por tanto, quedan siete números múltiplos de 8 entre 10 y 99 que no son múltiplos de 3: 16, 32, 40, 56, 64, 80, 88. Sin embargo, hay ocho números entre 10 y 99 tal que la suma de sus cifras es 8: 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80. Ninguno de estos es múltiplo de tres. Por tanto, si la cadena de múltiplos de 3 es lo más larga posible, sólo pueden aparecer en la cadena total siete números del conjunto 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80.

Por lo tanto no puede haber una cadena de longitud mayor que $90 - 16 - 6 - 4 - 1 = 63$, así que nuestra solución no se puede mejorar. □

4. La figura del mamut se mueve como un alfil de ajedrez (en diagonales), pero sólo en tres de las cuatro direcciones (la dirección ausente puede ser diferente para diferentes mamuts). Coloca la **mayor** cantidad de mamuts que puedas en un tablero 8×8 de manera que no se ataquen mutuamente.

Solución. Como mucho se podrán colocar 20 mamuts: Hay 30 diagonales distintas en el tablero. Cada mamut está en 2 diagonales. En una diagonal que tiene un mamut hay como mucho otro mamut, y no hay ningún otro mamut en las tres diagonales que ocupan estos dos. Por tanto, como mucho podrá haber $\frac{30 \cdot 2}{3} = 20$ mamuts. Veamos que esto es posible:



Para esto, hemos dividido las 15 diagonales negras en cinco grupos de 3 (dos en un sentido y una en otro), y colocado mamuts en las dos intersecciones de estas tres diagonales de manera que no se atacaran. Una vez hecho esto, hemos rotado el dibujo 90° alrededor del centro del tablero para hallar los mamuts que se encuentran en diagonales blancas. □

5. Coloca 9 números naturales en una tabla de tamaño 3×3 de manera que sea posible recortar rectángulos cuyos números sumen cualquier número de 1 a N para el **máximo** valor de N que puedas.

Por ejemplo, en la tabla

1	1	5
1	1	1
1	1	1

podemos conseguir cualquier número de 1 a 8 pero no podemos conseguir 9.

Solución. Se puede conseguir $N = 29$ en esta tabla:

9	1	13
15	4	3
2	6	12

Si Moisés lo ha programado bien, esto es el valor máximo posible de N y la tabla que hemos dado es la única en la que se alcanza (salvo simetrías). $\square$