PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023–24

Fecha: 17 y 24 de noviembre, 15 de diciembre de 2023.

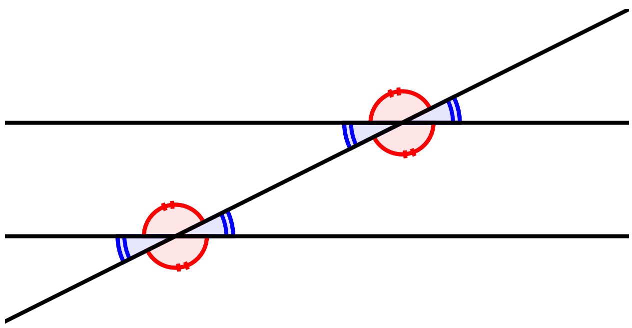
Semejanza, homotecia

Vamos a enunciar algunos resultados y ejemplos de geometría que pueden ser útiles para la resolución de los problemas. Después de cada ejemplo hay un problema para que lo hagáis vosotros. Recomendamos empezar la hoja por estos problemas. También recomendamos traer una regla y compás para realizar los dibujos.

En matemáticas, cualquier teoría comienza con una serie de axiomas a partir de los cuales se demuestran los resultados posteriores. La geometría del plano está regida por los postulados de Euclides:

1. Dos puntos distintos cualquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

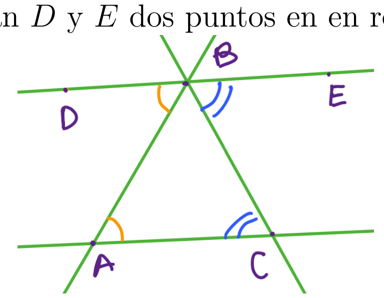
Teorema 1 (Ángulos cortados por rectas paralelas)**.** *Si una recta r corta a dos rectas paralelas s y s', los ángulos que se forman son iguales.*



Omitimos la demostración de este teorema, pero veamos una de sus consecuencias.

Ejemplo resuelto. Demuestra que los ángulos de un triángulo suman 180°.

Solución. Sea ABC un triangulo. Tracemos una recta paralela a la recta AC que pasa por el punto B. Sean D y E dos puntos en en recta a ambos lados de B.

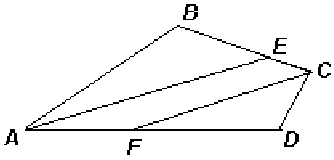


Entonces tenemos que $\angle BAC = \angle ABD$ y $\angle ACB = \angle CBE$. Por lo tanto

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°.$$

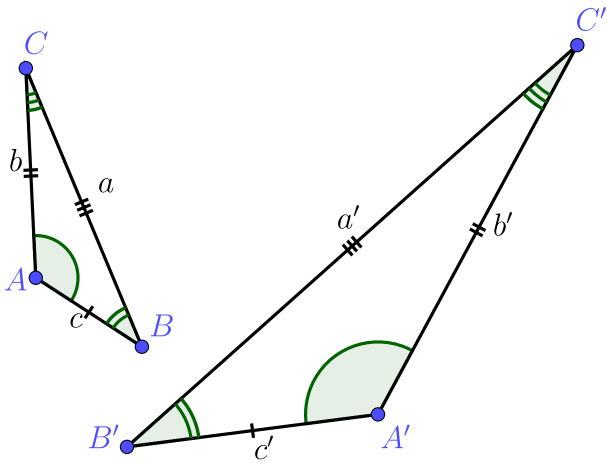
$\square$

Problema 1. En el cuadrilátero $ABCD$, las bisectrices AE y CF de los ángulos A y C son paralelas (ver figura). Demuestra que los ángulos B y D son iguales.



Solución. De la condición y la igualdad de los ángulos correspondientes en rectas paralelas, se deduce que $\angle CFD = \angle EAD = \angle EAB$ y que $\angle BEA = \angle BCF = \angle DCF$. Por lo tanto, dos ángulos del triángulo ABE son respectivamente iguales a dos ángulos del triángulo CDF. Por lo tanto, también son iguales los terceros ángulos de estos triángulos: $\angle ABE = \angle CDF$. $\square$

Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$son **semejantes** si $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$. y también se cumple $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$.

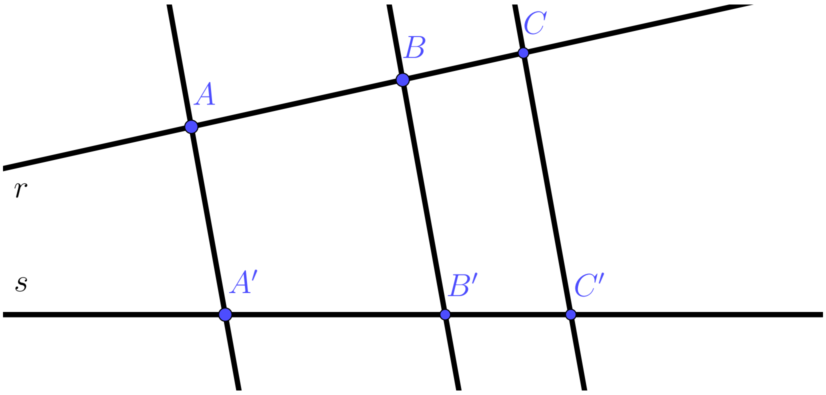


El valor $\alpha = \dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$ se llama el **coeficiente de semejanza**. El siguiente teorema nos dice que es necesario conocer sólo una parte de estas condiciones.

Teorema 2 (Semejanza de triángulos)**.** *Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$, y se cumple una (**cualquiera**) de estas tres condiciones, entonces son semejantes:*

- $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$.
- $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.
- $\angle CAB = \angle C'A'B'$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Teorema 3 (Teorema de Tales)**.** *Si dos rectas cualesquiera r y s son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determinan en la recta r son proporcionales a los que determinan en la recta s.*



Es decir,

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

Demostración. Sea el punto K la intersección de $A'C$ y BB'. Entonces los triángulos $A'CC'$ y $A'KB'$ son semejantes. Entonces

$$\frac{|A'B'|}{|A'C'|} = \frac{|AK|}{|A'C|}.$$

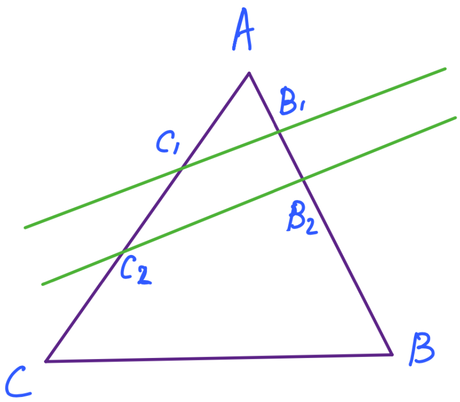
Los triángulos ACA' y BCK son también semejantes. Por eso

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|KC|}{|A'C|} = 1 - \frac{|AK|}{|A'C|} = 1 - \frac{|A'B'|}{|A'C'|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|}.$$

Por lo tanto, $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$. Observemos que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $b \neq d$, entonces $\frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}$. Concluimos que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$.

□

Problema 2. Si dos rectas paralelas cortan el ángulo con el vértice A formando los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2, entonces estos triángulos son semejantes y $\frac{|AB_1|}{|AB_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$ (los puntos B_1 y B_2 están en un lado del ángulo, C_1 y C_2 están en el otro).

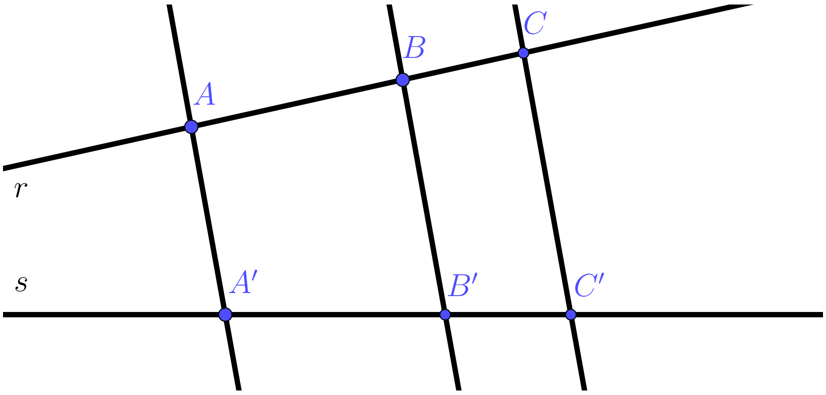


Solución. De la condición y la igualdad de los ángulos correspondientes en rectas paralelas, se deduce que $\angle AB_1C_1 = \angle AB_2C_2$. Entonces los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2 son semejantes. Por lo tanto, $\frac{|AB_1|}{|AB_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$. □

Ejemplo resuelto. Demuestra el recíproco del teorema de Tales: Si tenemos el dibujo anterior y sabemos que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|},$$

y que AA' y CC' son paralelas, entonces también son paralelas a BB'.



Pista: considera la paralela a AA' por B, y demuestra que pasa por B'.

Solución. De $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ se sigue que $\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$: recuerda que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces esta fracción también es igual a $\frac{a+c}{b+d}$.

Si seguimos la pista y dibujamos esta recta, cortará a S en un punto X. El teorema de Tales dice que

$$\frac{|AB|}{|A'X|} = \frac{|BC|}{|XC'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},$$

Entonces,

$$|A'X| = \frac{|AB| \cdot |A'C'|}{|BC|} = |A'B'|$$

$$|C'X| = \frac{|BC| \cdot |A'C'|}{|AB|} = |C'B'|$$

Por lo que tiene que ser $X = B'$.

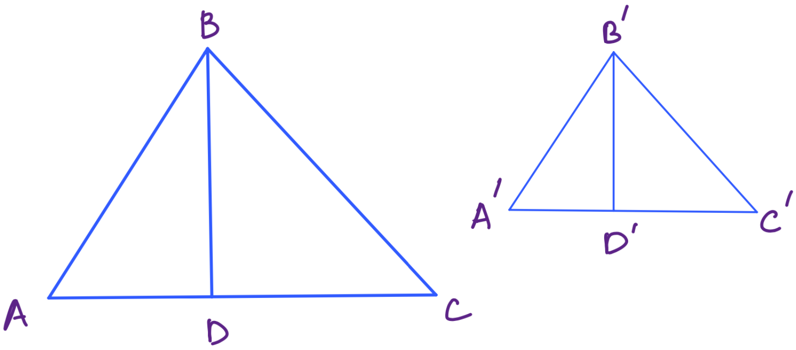
□

Problema 3. La línea media de un triángulo es el segmento que une los puntos medios de los lados. Demuestra que la línea media es paralela al tercer lado del triángulo y tiene la mitad de su longitud.

Solución. Aplica el recíproco del teorema de Tales. □

Teorema 4. *La relación entre las áreas de triángulos semejantes es igual al cuadrado del coeficiente.*

Demostración. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes con el coeficiente de semejanza igual a α. Sean AD y $A'D'$ alturas en los triángulos ABC y $A'B'C'$, respectivamente.



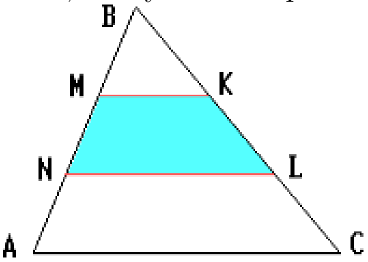
Observemos que los triángulos BDC y $B'D'C'$ tienen los ángulos correspondientes iguales y por lo tanto son semejantes con el coeficiente de semejanza igual a $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \alpha$. Entonces, $\frac{|BD|}{|B'D'|} = \alpha$. Concluimos que

$$\frac{Area_{ABC}}{Area_{A'B'C'}} = \frac{|AC||BD|}{|A'C'||B'D'|} = \alpha^2.$$

□

Problema 4. A través de los puntos M y N, que dividen el lado AB del triángulo ABC en tres partes iguales, se han trazado líneas paralelas al lado AC. Encuentra el área de la parte del triángulo comprendida entre estas líneas, si el área del triángulo ABC es igual a 1.

Solución. Tenemos que $|AN| = |NM| = |MB|$. Sean los puntos K y L en el lado BC de tal forma que MK, NL y AC son paralelos.



Entonces, los triángulos ABC, NBL y MBK son semejantes. Por lo tanto

$$Area_{BNL} = \frac{4}{9} Area_{ABC}, Area_{BMK} = \frac{1}{9} Area_{ABC}.$$

Entonces,

$$Area_{MKLN} = Area_{BNL} - Area_{BMK} = \frac{4}{9} Area_{ABC} - \frac{1}{9} Area_{ABC} = \frac{1}{2} Area_{ABC} = 1/3.$$

$\square$

Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$son **congruentes** ó **iguales** si $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$ y también se cumple $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$. Ees decir, son congruentes con el coeficiente de congruencia 1.

Ejemplo resuelto (Congruencia de triángulos)**.** Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$, y se cumple alguna de estas tres condiciones (**cualquiera**), entonces son congruentes:

- $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$.
- $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, \angle ABC = \angle A'B'C'$.
- $|AB| = |A'B'|, \angle CAB = \angle C'A'B', \angle ABC = \angle A'B'C'$.

Solución. El Teorema 2 implica que en los tres casos los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y la condición $|AB| = |A'B'|$ que el coeficiente de semejanza es 1. $\square$

La construcción con regla y compás es el trazado de puntos, segmentos de recta y ángulos usando exclusivamente una regla y compás (sin escuadra, cartabón, ni transportador de ángulos). Todas las construcciones con regla y compás son aplicaciones sucesivas de dos construcciones básicas:

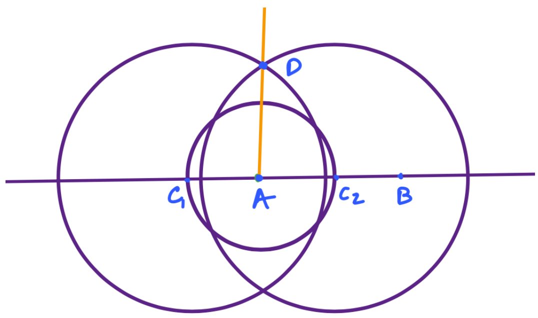
1. Dados dos puntos A y B, crear la recta que une estos dos puntos.
2. Dados tres puntos A, B y C, crear la circunferencia con centro en A y radio $|BC|$.

Con estas construcciones obtenemos puntos nuevos como puntos de intersección de rectas y circunferencias construidas.

Mientras lees la solución al siguiente ejemplo resuelto, reproduce lo que dice en tu cuaderno usando regla y compás, para acostumbrarte.

Ejemplo resuelto. Dados dos puntos A y B distintos, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto A.

Solución. El procedimiento es el siguiente:



1. Trazamos una circunferencia con el centro A que interseca AB en los puntos C_1 y C_2 (en particular, $|AC_1| = |AC_2|$).

2. Escogemos un radio $r > |AC_1|$ y trazamos dos circunferencias de radio r con centros C_1 y C_2. Sea D el punto de intersección (en particular, $|DC_1| = |DC_2|$).

3. La recta AD es perpendicular a AB.

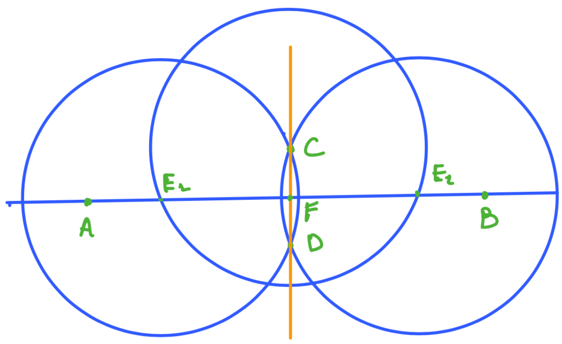
Para ver que la construcción es correcta, observemos que los triángulos AC_1D y AC_2D son congruentes ya que tienen los lados correspondientes iguales ($|AC_1| = |AC_2|$ ya lo sabíamos, al igual que $|DC_1| = |DC_2|$, y el lado AD es común a ambos triángulos). Entonces $\angle DAC_1 = \angle DAC_2$. Además, $\angle DAC_1 + \angle DAC_2 = 180°$, por lo que

$$\angle DAC_1 = \angle DAC_2 = 90°.$$

□

Problema 5. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto C.

Solución. El procedimiento es el siguiente:



1. Trazamos una circunferencia con el centro C que interseca AB en los puntos E_1 y E_2 (en particular, $|CE_1| = |CE_2|$).

2. Con el mismo radio trazamos dos circunferencias con centros E_1 y E_2. Sea D el otro punto de intersección (en particular, $|DE_1| = |DE_2| = |CE_1| = |CE_2|$).

3. La recta CD es perpendicular a AB.

Veamos que en efecto, la recta CD es perpendicular a AB. Sea F la intersección de AB y CD. Para ver que la construcción es correcta, observemos que los triángulos CE_1D y CE_2D son congruentes ya que tienen los lados correspondientes iguales. Entonces $\angle E_1CF = \angle E_2CF$. Por la condición 2 del Teorema 2 los triángulos E_1CF y E_2CF son también semejantes, y como tienen coeficiente de semejanza $k = 1$, son congruentes. Entonces $\angle E_1FC = \angle E_2FC$, y como $\angle E_1FC + \angle E_2FC = 180°$, obtenemos que

$$\angle E_1FC = \angle E_2FC = 90°.$$

□

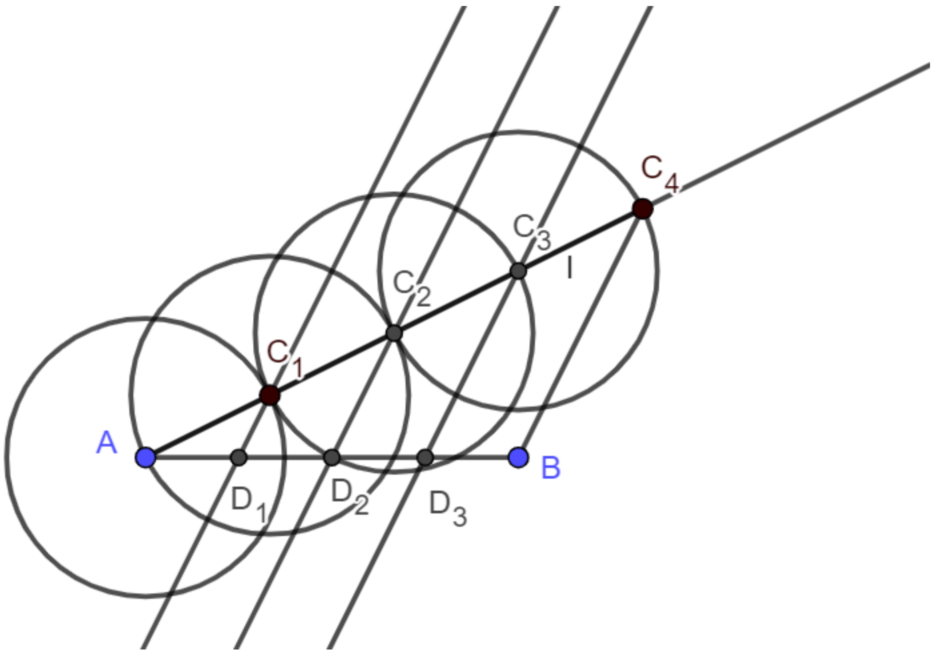
Problema 6. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta paralela a la recta AB y que pasa por el punto C.

Solución. Usando el Problema 5, trazamos la recta r que es perpendicular a AB y pasa por C. Usando el ejemplo resuelto anterior, trazamos la recta perpendicular a r que pasa por C. La recta resultante es paralela a AB y pasa por C. □

Problema 7. Sea $n \geq 2$. Explica por qué funciona la siguiente construcción con regla y compás para dividir un segmento AB en n partes iguales.

1. Trazar una semirrecta l que pasa por A y no tiene la dirección de AB.
2. Fijamos un radio R cualquiera con nuestro compás y trazamos la circunferencia con centro A y radio R. Llamamos C_1 a uno de los puntos de intersección de l con esta circunferencia.
3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, trazamos una circunferencia con centro C_i y radio R, y llamamos C_{i+1} al punto de intersección distinto de C_{i-1} de esta circunferencia con la recta l (donde $C_0 = A$).
4. Para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, trazamos la recta paralela a C_nB que pasa por C_i, y llamamos D_i al punto de intersección de esta recta paralela con el segmento AB.
5. Los puntos $D_1, \ldots, D_{n-1}$ dividen el segmento AB en n partes iguales, con $|AD_1| = |D_1D_2| = |D_2D_3| = \ldots = |D_{n-1}B|$.

El dibujo de la construcción está hecho para $n = 4$ en la siguiente figura, en la que se han dibujado las rectas paralelas resultantes de la construcción del paso 4 pero no se han dibujado los pasos intermedios del paso 4:



Solución. Basta ver que $|AD_i| = \frac{i}{n}|AB|$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Por el Teorema 1, los ángulos correspondientes de los triángulos AC_nB y AC_iD_i son iguales, por lo que la tercera condición del Teorema 2 nos dice que los triángulos AC_nB y AC_iD_i son semejantes, y su coeficiente de semejanza es

$$\frac{|AB|}{|AD_i|} = \frac{|AC_n|}{|AC_i|} = \frac{nR}{iR} = \frac{ni}{.}$$

En particular, $|AD_i| = \frac{i}{n}|AB|$, como queríamos demostrar. □

La **homotecia** con centro en un punto O y coeficiente k es una transformación geométrica que lleva cada punto A a un punto A_1 tal que A_1 está en la recta OA y $|OA_1| = k \cdot |OA|$. Si k es positivo, A y A_1 están en el mismo lado del punto O, si k es negativo, están en los lados opuestos.

La homotecia lleva una recta a una recta que es paralela a ella. Por eso la homotecia conserva angulos y lleva triangulos a sus semejantes con el coeficiente de semejanza $|k|$, donde k es el coeficiente de la homotecia.

Ejemplo resuelto. Sea ABC un triangulo y M la intersección de sus meridianas. Entonces la homotecia con centro M y coeficiente $-\frac{1}{2}$ lleva A al punto medio del lado BC.

Solución. Sea D el punto medio de BC. Entonces M divide AD en proporción $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{2}{1}$. □

Problema 8. Demuestra que tres rectas trazadas a través de los puntos medios de los lados de un triángulo y paralelas a las bisectrices de los ángulos opuestos, se intersecan en un solo punto.

Pista Intenta usar homotecia con centro en la intersección de medianas del triangulo y coeficiente $-\frac{1}{2}$.

Solución. En la homotecia con centro en el punto M, intersección de las medianas del triángulo ABC, y con un coeficiente de $-\frac{1}{2}$, las rectas que contienen las bisectrices del triángulo ABC se transforman en rectas paralelas a ellas, que pasan por los puntos medios de los lados del triángulo ABC. Dado que las bisectrices del triángulo se cruzan en un solo punto, sus imágenes bajo la homotecia también se cruzan en un solo punto. □

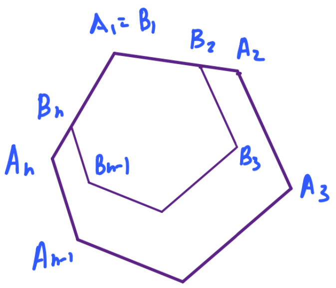
Hemos definido el concepto de triángulos semejantes. Hablando de manera informal, objetos semejantes son aquellos que tienen la misma forma, pero (posiblemente) diferentes tamaños. Los polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ y $B_1B_2 \ldots B_n$ se llaman semejantes si

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \ldots = \frac{|A_nA_1|}{|B_nB_1|}$$

y los ángulos en las vértices A_1, A_2, $\ldots$, A_n son respectivamente iguales a los ángulos en las vértices B_1, B_2, $\ldots$, B_n.

Ejemplo resuelto. La proporción entre las diagonales correspondientes de polígonos semejantes es igual al coeficiente de semejanza.

Solución. Sean $A_1A_2 \ldots A_n$ y $B_1B_2 \ldots B_n$ dos polígonos semejantes. Los podemos dibujar de tal forma que $A_1 = B_1$, B_2 esta en el rayo AA_2 y B_n está en el rayo AA_n.

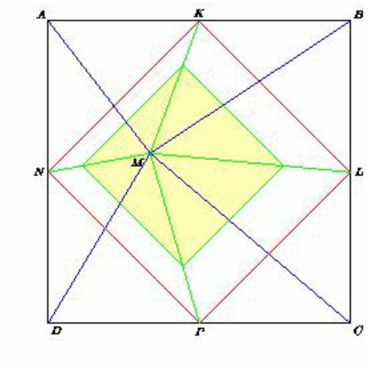


Entonces la homotetia con el centro en el punto A y coeficiente $\frac{|A_1A_2|}{|BB_1|}$ lleva el polígono $B_1B_2 \ldots B_n$ al polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ y las diagonales de $B_1B_2 \ldots B_n$ a las diagonales correspondientes de $A_1A_2 \ldots A_n$. □

Problema 9. Dentro del cuadrado $ABCD$ se encuentra un punto M. Demuestra que los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABM, BCM, CDM y DAM forman un cuadrado.

Pista: Aplica homotecia.

Solución. Sean K, L, P y N los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD respectivamente.



Entonces, $KLMN$ es un cuadrado. Dado que el punto de intersección de las medianas divide cada mediana del triángulo en la proporción $2:1$, desde el vértice, durante la homotecia con centro en M y coeficiente $\frac{2}{3}$, el cuadrilátero $KLMN$ se transforma en un cuadrilátero con vértices en los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABM, BCM, CDM y DAM. Por lo tanto, este último cuadrilátero también es un cuadrado. $\square$

Problema 10. La línea media de un trapecio se refiere al segmento que conecta los puntos medios de los lados del trapecio. Demuestra que la línea media de un trapecio es paralela a las bases y es igual a la mitad de la suma de sus longitudes.

Solución. Sea $ABCD$ un trapecio donde AD es paralelo a BC. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y CD respectivamente en el trapecio. Conectemos los puntos M y N con el punto medio K de la diagonal BD. Entonces, MK y NK son las líneas medias de los triángulos ABD y BDC respectivamente, por lo tanto, MK es paralelo a AD y BC es paralelo a NK. Dado que a través de un punto que no está en una línea, solo se puede trazar una línea paralela a la dada, los puntos M, K y N están en la misma línea. Esto significa que MN es paralelo a AD y BC.

Al mismo tiempo, $|MN| = |MK| + |KN| = \frac{1}{2}|AD| + \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$.

$\square$

Problema 11. Demuestra que el hexágono regular de lado s está inscrito en una circunferencia de radio s. Usa esto para describir cómo, a partir de una longitud s dada, podemos construir con regla y compás un hexágono regular de lado s.

Solución. El ángulo interior de un hexágono regular es $120°$. Si trazamos las bisectrices a dos ángulos consecutivos del hexágono, estas se cortan en un punto O. Uniendo O con todos los vértices, el hexágono queda dividido en 6 triángulos equiláteros de lado s. La circunferencia de centro O y radio s contiene a todos los vértices del hexágono.

Para construir un hexágono de lado s, trazamos una circunferencia de radio s. Marcamos un punto en la circunferencia, y a partir de él y en sentido antihorario, marcamos sucesivamente otros puntos que están en la circunferencia y a distancia s del anterior. De esta manera marcaremos los 6 vértices de un hexágono de lado s.

$\square$

Problema 12. Demuestra que si tenemos dibujado en un papel un polígono regular de n lados y nos dan una longitud s, podemos dibujar a partir de él un polígono regular de n lados cuyo lado mide s con regla y compás.

Solución. Sea O el centro de la circunferencia que contiene todos los vértices del polígono de n lados dado, que podemos obtenerlo como la intersección de dos mediatrices de dos lados distintos del polígono. Sean A y B dos vértices consecutivos del polígono dado. Extendiendo el segmento AB por el lado B si fuera necesario, trasladamos la longitud s al rayo AB, empezando por el vértice A, marcando un punto C en la recta que pasa por A y por B.

Recordemos que con regla y compás se pueden trazar perpendiculares y paralelas a una recta r que pasen por un punto dado P . Para una recta perpendicular, abrimos el compás lo suficiente para que la circunferencia de ese radio y centro P corte a la recta r en dos puntos, que llamamos A y B. Ahora, la recta perpendicular a r que pasa por P es la mediatriz del segmento AB, y esto se puede hallar de la siguiente manera: Ponemos la distancia $|AB|$ como radio. Las circunferencias de centros A y B y radio $|AB|$ se cortan en dos puntos, y la recta que une esos dos puntos es la mediatriz del segmento AB. Ahora que hemos obtenido la perpendicular a r que pasa por P, sólo tenemos que obtener la perpendicular a ésta última que pasa por P para obtener la recta paralela a r que pasa por P.

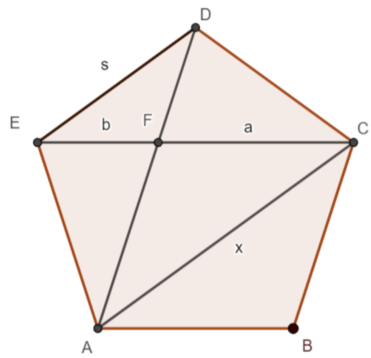
Trazamos la recta paralela a OA que pasa por C. Sea D el punto de intersección de esta recta con la recta OB. Trazamos la recta paralela a AB que pasa por D, y llamamos E al punto de intersección de esta recta con la recta OA. De esta manera, $ACDE$ es un paralelogramo, y $|DE| = |AC| = s$.

Ahora, basta con trazar la circunferencia de centro O que pasa por E e ir marcando a partir de D vértices en la circunferencia que estén a distancia s unos de otros para obtener los vértices de un polígono regular de n lados de lado s.

□

Problema 13. Nos dan un segmento de longitud s en un papel. El objetivo de este problema es llegar a dibujar con regla y compás un pentágono regular cuyo lado tiene longitud s.

a) En el pentágono regular $ABCDE$ de lado s siguiente hemos dibujado las diagonales AD, AC y EC. Las diagonales AD y EC se cortan en el punto F.



Sea x la longitud de cualquiera de las diagonales de este pentágono, sea $a = |FC|$ y $b = |EF|$. Demuestra que $a = s$ y $b = x - s$.

b) ¿Cuánto mide cada una de las diagonales de un pentágono regular de lado s? Usa que los triángulos EDF y FCA son semejantes en el dibujo anterior.

c) Explica cómo, a partir de un segmento de longitud s dibujado en un papel, podemos encontrar un segmento de la longitud hallada en el apartado b) usando regla y compás.

d) Construye un pentágono regular de lado s con regla y compás.

Solución. a) Como podemos inscribir un pentágono regular en una circunferencia, los ángulos $\angle ECD$, $\angle ACE$ y $\angle BCA$ son iguales, al abarcar el mismo arco de circunferencia ($\frac{1}{5}$ de circunferencia). Así, los triángulos ACF y ABC son congruentes, ya que ambos son isósceles, tienen el lado desigual en común, y $\angle ACF$ y $\angle BCA$. En particular, $a = s$, y como $a + b = x$, tenemos que $b = x - a$.

b) Los triángulos EDF y FCA son semejantes, por lo que

$$\frac{s}{x} = \frac{b}{a}$$

Por la parte anterior, esta ecuación se transforma en

$$\frac{s}{x} = \frac{x - s}{s},$$

por lo que

$$x^2 - sx - s^2 = 0$$

Esta ecuación en x tiene como soluciones $x = \frac{s \pm s\sqrt{5}}{2}$, pero sólo una de estas soluciones es positivas y puede ser la longitud de la diagonal del pentágono. Por tanto, la longitud de la diagonal es

$$x = s\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

c) Si somos capaces de crear un segmento de longitud $\sqrt{5}s$, podemos sumarle uno de longitud s con compás, y podemos dividirlo entre 2 con regla y compás. Por tanto, sólo nos queda explicar cómo, a partir de un segmento de longitud s, podemos construir uno de longitud $s\sqrt{5}$. Para eso, hacemos un rectángulo tal que uno de los lados mide $2s$ y otro mide s, y su diagonal mide $\sqrt{5}s$.

Resumimos la construcción:

1 Trazamos una recta r, y marcamos tres segmentos de longitud s uno detrás de otro. Sean A, B, C, y D los puntos que quedan marcados en la recta.

2 Trazamos la mediatriz del segmento BC de esta manera. Ponemos nuestro compás con una amplitud mayor que s, y, pinchando en B y en D trazamos las circunferencias con esos radios. Trazamos la recta que pasa por los dos puntos de intersección de esa circunferencia, que es la perpendicular a r que pasa por C. Llamamos l a esa perpendicular.

3 Trasladamos con nuestro compás un segmento de longitud s a la recta l, con uno de los extremos siendo C. Sea E su otro extremo. Trazamos el segmento AE, que mide $\sqrt{5}s$.

4 Sumamos al segmento AE una longitud de s extendiendo el segmento AE por uno de sus lados y trasladando la longitud s con el compás. En el segmento de longitud $(1+\sqrt{5})s$ que nos queda, trazamos su mediatriz como en el paso 2. Nos queda marcado un segmento de longitud $s\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, como queremos.

d) Vamos a construir un pentágono regular de lado s para cualquier segmento de longitud s que marquemos en un papel. Construimos un segmento de longitud $x = s\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A partir de eso, construimos con regla y compás un triángulo isósceles T de lados s, x y x. En cada lado de longitud x, construimos un triángulo isósceles de lados x, s y s con regla y compás, de manera que estos triángulos sólo intersecan al triángulo T en el segmento común de longitud x. Quedan dibujados 5 segmentos de longitud s en el papel que forman un pentágono regular.

$\square$

Problema 14. Un trapecio tiene una altura (distancia entre los dos lados paralelos) de 12 cm y sus diagonales miden 13 y 15 cm respectivamente. Determina todas las áreas posibles de este trapecio.

Solución. Podemos situar el trapecio $ABCD$ en el plano de manera que $A = (a, 12)$, $B = (b, 12)$, $C = (c, 0)$ y $D = (d, 0)$. Los vértices están enumerados en sentido horario, por lo que $b > a$ y $c > d$ Podemos asumir que la diagonal larga es AC, por lo que $c > a$. Entonces, el teorema de Pitágoras nos dice que $(c-a)^2 + 12^2 = 15^2$ y que $(d-b)^2 + 12^2 = 13^2$, por lo que $c - a = 9$ y $|d - b| = 5$.

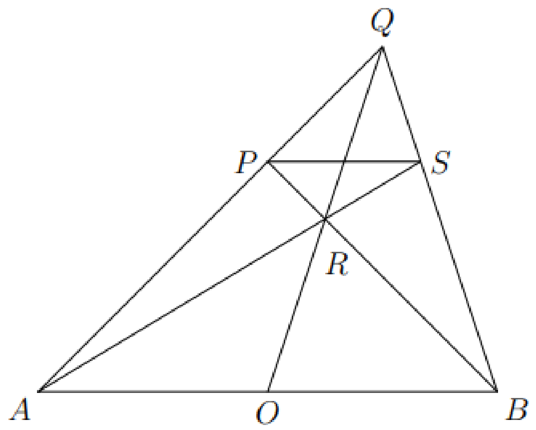
El área del trapecio es $\frac{((c-d)+(b-a))\cdot 12}{2} = 6\cdot(c-a) + 6\cdot(b-d) = 6\cdot(9\pm 5)$, y esto puede ser 84 cm^2 o 24 cm^2, según el signo. Las dos son posibles:

- Ejemplo con área 84 cm^2: $A = (0, 12)$, $B = (5, 12)$, $C = (9, 0)$, $D = (0, 0)$.
- Ejemplo con área 24 cm^2: $A = (0, 12)$, $B = (1, 12)$, $C = (9, 0)$, $D = (6, 0)$.

$\square$

Problema 15. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B. ¿Cómo podemos dibujar una recta paralela a AB que pase por P?

Solución. Dibujamos el segmento AP y lo extendemos por el lado de P. Marcamos un punto Q en esa extensión. Dibujamos los segmentos OQ, BQ y PB. Sea R el punto de intersección de PB con OQ. Marcamos el segmento AR, y lo extendemos hasta que corte a BQ en el punto S. Veamos que PS es paralelo a AB.



En el dibujo vemos el triángulo AQB con tres cevianas que se cortan en el punto R. El teorema de Ceva nos dice que

$$|BO| \cdot |AP| \cdot |QS| = |OA| \cdot |PQ| \cdot |SB|$$

y como $|BO| = |OA|$, obtenemos que

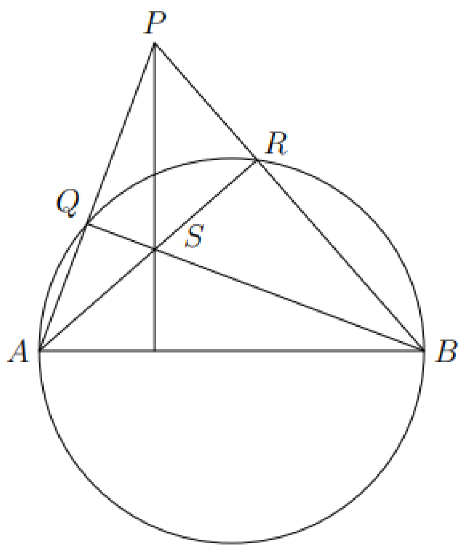
$$\frac{|AP|}{|SB|} = \frac{|PQ|}{|QS|}.$$

El resultado se sigue del recíproco del teorema de Tales.

$\square$

Problema 16. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O, la circunferencia de diámetro AB y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B ni en la circunferencia dada. ¿Cómo podemos dibujar una recta perpendicular a AB que pase por P?

Solución. Sea Q (respectivamente R) el punto de la circunferencia distinto de A (respectivamente B) situados también en la recta AP (respectivamente BP). Sea S el punto de intersección de los segmentos AR y QB. Veamos que la recta que pasa por P y S es perpendicular a AB.



Tenemos que $\angle AQB$ y $\angle ARB$ son rectos, por lo que S es el ortocentro del triángulo APB. Como las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro, tenemos que la recta PS contiene a la altura del triángulo ABP que sale de P, y por tanto es perpendicular a AB.

$\square$

Problema 17. Consideramos n números reales $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_n > 0$, con $n \geq 3$. Supongamos que $L_1 < L_2 + L_3 + \ldots + L_n$. Demuestra que existe un polígono de n lados inscrito[1] en una circunferencia tal que las longitudes de sus n lados son $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Solución. Medimos los ángulos en radianes. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_1$. En una circunferencia de radio r, el ángulo θ_i en $(0, 2\pi)$ que alberga una cuerda de longitud L_i es el que cumple que sen $\frac{\theta_i}{2} = \frac{L_i}{2r}$. Hay un polígono de n lados cuyas longitudes son $L_1, L_2, \ldots, L_n$ si y solo si existen $r, \theta_1, \ldots, \theta_n > 0$ tal que $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = 2\pi$ y sen $\frac{\theta_i}{2} = \frac{L_i}{2r}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Esto obliga a que $r \geq \frac{L_1}{2}$.

La identidad $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = 2\pi$ nos dice que como mucho uno de los θ_i es mayor que π. Además, si tuviéramos un polígono de n lados con esas longitudes inscrito en una circunferencia y alguno de los θ_i fuera mayor que π, necesariamente tendría que ser θ_1. Notamos que $\frac{\theta_i}{2}$ está en el intervalo $(0, \pi)$, por lo que si sen $\frac{\theta_i}{2} = \frac{L_i}{2r}$, entonces

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_i}{2r}\right) = \begin{cases} \frac{\theta_i}{2} & \text{si } \frac{\theta_i}{2} \text{ está en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \pi - \frac{\theta_i}{2} & \text{si } \frac{\theta_i}{2} \text{ está en } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \end{cases}$$

donde estamos considerando arcsen como una función de $(0, 1]$ a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Por tanto, hay un polígono de n lados cuyas longitudes son $L_1, L_2, \ldots, L_n$ si y solo si existe r en el intervalo $\left[\frac{L_1}{2}, \infty\right)$ tal que

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_1}{2r}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_2}{2r}\right) + \ldots + \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_n}{2r}\right) = \pi \tag{1}$$

o tal que

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_1}{2r}\right) - \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_2}{2r}\right) + \ldots + \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_n}{2r}\right)\right) = 0 \tag{2}$$

La función arcsen que estamos considerando es continua y creciente, por lo que arcsen $\left(\frac{L_i}{2r}\right)$ vista como función de r (con dominio $\left[\frac{L_1}{2}, \infty\right)$) es una función continua y decreciente, con máximo arcsen $\left(\frac{L_i}{L_1}\right)$ en $r = \frac{L_1}{2}$ y ningún mínimo absoluto, aunque se acerca a 0 todo lo que queramos conforme r tiende a infinito. Por tanto, si llamamos $f(r)$ a arcsen $\left(\frac{L_2}{2r}\right)$+arcsen $\left(\frac{L_3}{2r}\right)+\ldots+$arcsen $\left(\frac{L_n}{2r}\right)$, tenemos que $f(r)$ es una función continua y decreciente tal que su máximo en $\left[\frac{L_1}{2}, \infty\right)$ es

$$M = \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_2}{L_1}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_3}{L_1}\right) + \ldots + \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_n}{L_1}\right)$$

y se acerca a 0 todo lo que queramos cuando r tiende a ∞. Por tanto, la función arcsen $\left(\frac{L_1}{2r}\right) + f(r)$ es continua y decreciente, con máximo $\frac{\pi}{2} + M$ y tomando valores todo lo cercanos a 0 que queramos.

Ahora, tenemos dos casos, $M \geq \frac{\pi}{2}$ y $0 < M < \frac{\pi}{2}$.

- Caso $M \geq \frac{\pi}{2}$: Este caso es equivalente a $M \geq \frac{\pi}{2}$. Por tanto, el teorema de Bolzano aplicado a la función arcsen $\left(\frac{L_1}{2r}\right)+f(r)$ de (1) nos dice que existe un r_0 en $\left[\frac{L_1}{2}, \infty\right)$ tal que arcsen $\left(\frac{L_1}{2r_0}\right)+f(r_0) = \pi$, por lo que podremos inscribir un polígono de n lados de longitudes $L_1, \ldots, L_n$ en una circunferencia de radio r_0. Además, como arcsen $\left(\frac{L_1}{2r}\right) + f(r)$ es estrictamente decreciente, este valor de r_0 es único.

- Caso $0 < M < \frac{\pi}{2}$: En este caso, tenemos que

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_1}{L_1}\right) + f\left(\frac{L_1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - M > 0.$$

Por tanto, basta encontrar un valor de r para el cual la función arcsen $\left(\frac{L_1}{2r}\right)-f(r)$ de (2) tome un valor ≤ 0, y el teorema de Bolzano nos asegurará la existencia de un r_0 en $\left[\frac{L_1}{2}, \infty\right)$ tal que arcsen $\left(\frac{L_1}{2r_0}\right)$ −

[1] Se dice que un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están en la circunferencia.

$f(r_0) = 0$, por lo que podremos inscribir un polígono de n lados de longitudes $L_1, \ldots, L_n$ en una circunferencia de radio r_0 también en este caso.

Vamos a demostrar el siguiente resultado por inducción:

Sea k un número natural, y consideramos $x_1, \ldots, x_k$ en $[0,1]$ tal que $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 1$. Entonces

$$\operatorname{arcsen}(x_1) + \operatorname{arcsen}(x_2) + \ldots + \operatorname{arcsen}(x_k) \geq \operatorname{arcsen}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k).$$

El caso base ($k = 1$) es trivial porque se da la igualdad. Si $\operatorname{arcsen}(x_1)+\operatorname{arcsen}(x_2)+\ldots+\operatorname{arcsen}(x_n) \geq \frac{\pi}{2}$, la desigualdad es inmediata para todo k. Por tanto, podemos asumir que $\operatorname{arcsen}(x_1)+\operatorname{arcsen}(x_2)+\ldots+\operatorname{arcsen}(x_{k+1}) < \frac{\pi}{2}$ y que el resultado es cierto para k sumandos, siendo k un número ≥ 1. Por la hipótesis de inducción, sabemos que

$$\operatorname{arcsen}(x_1) + \operatorname{arcsen}(x_2) + \ldots + \operatorname{arcsen}(x_k) + \operatorname{arcsen}(x_{k+1}) \geq \operatorname{arcsen}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + \operatorname{arcsen}(x_{k+1})$$

Sea $y_1 = \operatorname{arcsen}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$ e $y_2 = \operatorname{arcsen}(x_{k+1})$. Tenemos que y_1, y_2 están en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Basta demostrar que

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} \geq \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(y_1) + \operatorname{sen}(y_2)).$$

Como ambos lados de la desigualdad son números en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y la función seno es estrictamente creciente en este intervalo, lo que queremos demostrar es equivalente a

$$\operatorname{sen}(y_1 + y_2) \geq \operatorname{sen}(y_1) + \operatorname{sen}(y_2).$$

Ahora, $\operatorname{sen}(y_1+y_2) = \operatorname{sen}(y_1)\cos(y_2)+\cos(y_1)\operatorname{sen}(y_2) \geq \operatorname{sen}(y_1)+\operatorname{sen}(y_2)$ porque $0 \leq \cos(y_1), \cos(y_2) \leq 1$, y esto concluye nuestra demostración por inducción.

Ahora, sea $r_0 \geq \frac{L_2+L_3+\ldots+L_n}{2}$, por lo que $\frac{L_2}{2r_0} + \frac{L_3}{2r_0} + \ldots + \frac{L_n}{2r_0} \leq 1$. Aplicando el resultado recuadrado,

$$f(r_0) \geq \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_2 + L_3 + \ldots + L_n}{2r_0}\right).$$

Como $L_1 < L_2 + L_3 + \ldots + L_n$, y el arco seno es una función creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_2 + L_3 + \ldots + L_n}{2r_0}\right) > \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_1}{2r_0}\right),$$

y juntando las últimas dos desigualdades, hemos encontrado un r_0 tal que $\operatorname{arcsen}\left(\frac{L_1}{2r_0}\right) - f(r_0) < 0$, lo que concluye nuestra demostración.

□

Problema 18. Azucena y Bárbara son rivales jugando al siguiente juego: se colocan junto a otras 2023 personas formando un círculo, pero no sabemos cuántas personas tienen entre ellas dos. Las dos se turnan haciendo jugadas, y en cada jugada la jugadora a la que le toca jugar quita del círculo a uno de sus dos vecinos (el que quiera). Gana la primera jugadora que quita a su rival del círculo. Empieza jugando Azucena. ¿Podemos determinar qué jugadora tiene estrategia ganadora, es decir, qué jugadora puede ganar haga lo que haga la otra?

Solución. Azucena tiene estrategia ganadora. Como 2023 es impar, empieza habiendo un número par de jugadores entre ellas por un lado e impar por el otro. Si el número par es 0, Azucena puede quitar a Bárbara del círculo. Si el número par es > 0, puede quitar a su vecino de ese lado, de forma que queden un número impar de jugadores entre ellas en ambos lados. Haga lo que haga Bárbara, dejará a Azucena en la situación en la que hay un número par de jugadores entre ellas por un lado e impar por el otro. Si Azucena sigue esta estrategia, tras como mucho 2022 jugadas el número par será 0 y ganará.

□

Problema 19. Una escalera está apoyada en una pared vertical. La escalera empieza estando vertical, pero se va deslizando hacia abajo hasta que acaba horizontal en el suelo. Al deslizarse, la parte de arriba de la escalera siempre está tocando la pared y la parte de abajo siempre está tocando el suelo. Describe la trayectoria trazada por el punto medio de la escalera durante este proceso, justificando tu respuesta.

Solución. Supongamos que la escalera tiene longitud l. Dibujamos la pared y el suelo en nuestro papel como el eje y y el eje x. La escalera en todo momento será un segmento de longitud l que parte del eje y y acaba en el eje x, formando un triángulo rectángulo con estos ejes. Además, si trazamos la vertical desde el punto medio de la escalera hasta el suelo, obtenemos un triángulo rectángulo semejante al anterior cuya hipotenusa tiene la mitad de longitud. Supongamos que la escalera se empieza a deslizar en el segundo 0 y que acaba horizontal en el segundo s. Sea (a_t, b_t) la posición del punto medio de la escalera en el segundo t. Por el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos, $a_t^2 + b_t^2 = \frac{l}{2}^2$, por lo que el punto medio de la escalera recorre una trayectoria que es un cuarto de círculo de radio $\frac{l}{2}$.

□

Problema 20. Dados tres puntos no alineados, describe un procedimiento que puedas realizar con regla y compás para hallar la circunferencia que contiene a los tres puntos. Demuestra que el procedimiento que has descrito funciona. ¿Puede haber otra circunferencia que contenga a los tres puntos?

Solución. Sean P, Q y R los tres puntos.

1. Abrimos nuestro compás una distancia $r = |PQ|$. Trazamos la circunferencia de centro P y radio r, y la circunferencia de centro Q y radio r. Estas dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. Trazamos la recta AB, que es la mediatriz del segmento PQ.

2. Trazamos la mediatriz del segmento QR siguiendo el paso anterior. Sea O la intersección de la mediatriz de QR y de la mediatriz de PQ.

3. El círculo de centro O y radio $|OP|$ contiene a los puntos P, Q, R.

Veamos que el paso 1 funciona. Tenemos que $|AP| = |AQ| = |PQ| = r_1$, es decir, el triángulo APQ es equilátero. Sea M el punto medio de PQ. Como APQ es equilátero, AM es la altura de APQ que sale de A, por lo que la mediatriz del segmento PQ es la recta AM. Similarmente, la mediatriz del segmento PQ es la recta BM. Por tanto, la recta que une los puntos A y B es la mediatriz de PQ.

El paso 2 funciona porque es idéntico al 1. Las dos mediatrices se cortan en un punto porque, si fueran paralelas, P, Q y R estarían alineados.

Como O está en la mediatriz de PQ, tenemos que $|OP| = |OQ|$, y como O está en la mediatriz de QR, entonces $|OQ| = |OR|$. Por tanto, el paso 3 funciona.

Esta es la única circunferencia que contiene a los tres puntos. El centro de cualquier circunferencia que contenga a los tres puntos tiene que estar en la mediatriz de PQ y en la mediatriz de QP, por lo que necesariamente tiene que ser el punto O que hemos hallado, y una vez hallado el centro, está claro que sólo hay un radio para el cual los tres puntos están en la circunferencia. Esto es consecuencia de que cualquier punto O' que equidista de P y Q (resp. Q y R) está en la mediatriz del segmento PQ (resp. QR). Veámoslo. Sea O' un punto que equidista de P y Q. Entonces $PO'Q$ es un triángulo isósceles. Sea A el punto de intersección de la bisectriz de $\angle PO'Q$ con la recta PQ. Tenemos que los triángulos $O'PA$ y $O'QA$ son congruentes, y como $\angle O'AP + \angle O'AQ = 180°$, tenemos que $\angle O'AP = \angle O'AQ = 90°$, y $|PA| = |QA|$. Por tanto A es el punto medio entre P y Q, y $O'A$ es la mediatriz del segmento PQ.

□

Problema 21. Con la ayuda de un compás y una regla, construye un cuadrado a partir de cuatro puntos ubicados en sus cuatro lados.

Solución. **Pista:** Supongamos que K, P, R y Q son los puntos dados (en el orden indicado). Construye circunferencia que tienen los segmentos KP y RQ como diámetros).

Supongamos que los puntos K, P, R y Q están ubicados en los lados AB, BC, CD y AD, respectivamente, del cuadrado $ABCD$ buscado. Dado que el segmento KP se ve desde el punto B bajo un ángulo recto, este punto yace en la circunferencia con diámetro KP. De manera similar, el punto D está en la circunferencia con diámetro PQ. Sea BD la diagonal del cuadrado que corta el primer círculo en el punto M y el segundo en el punto N. Dado que la diagonal del cuadrado divide su ángulo por la mitad, los ángulo $\angle PKM = \angle PBM$ y $\angle QRN = \angle QAN$ son iguales a $45°$.

De esto se sigue el siguiente método de construcción. Supongamos que K, P, R y Q son los puntos dados (en el orden indicado). Construyamos dos circunferencias con los segmentos KP y QR como diámetros. Sean M y N los puntos de la circunferencias tales que los ángulo $\angle PKM$ y $\angle QRN$ son iguales a $45°$. La diagonal del cuadrado yace en la línea MN. Esto nos da los puntos B y D. Después es inmediato encontrar A y C.

Este procedimiento sólo funciona si los puntos M y N no coinciden. En este caso el problema tiene una única solución. En caso contrario, el problema tiene infinitas soluciones.

□

Problema 22. Sean h_1, h_2, h_3 las alturas de un triángulo y r el radio del circunferencia inscrita en el triángulo. Demuestra que

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r.$$

Solución. Supongamos que a, b, c son los lados del triángulo correspondientes a las alturas h_1, h_2 y h_3, respectivamente. Además, sea S el área del triángulo. Entonces,

$$S = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

Por lo tanto,

$$h_1 = (1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}).$$

Análogamente,

$$h_2 = (1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b})r, \ h_3 = (1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c})r.$$

Por lo tanto,

$$h_1 + h_2 + h_3 = (3 + (\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c}) + (\frac{c}{b} + \frac{b}{c}))r \geq (3+2+2+2)r = 9r.$$

□

Problema 23. Un polígono convexo tiene la siguiente propiedad: si todas las rectas en las que yacen sus lados se trasladan hacia afuera en paralelo a una distancia de 1, las rectas resultantes forman un polígono semejante al original, y los lados paralelos serán proporcionales. Demuestra que se puede inscribir un círculo en dicho polígono.

(Es mucho más fácil demostrar la afirmación inversa: si se puede inscribir un círculo en el polígono, al alejar todos sus lados a una misma distancia (en particular, a una unidad), se obtiene un polígono semejante, donde el centro de homotecia es el centro del círculo.)

Solución. Supongamos que el polígono P' se obtiene del polígono P alejando sus lados hacia adentro en una distancia de 1, y al mismo tiempo, P' puede obtenerse de P mediante una transformación f de homotecia con el coeficiente $k < 1$. Sea $[AB]$ un lado de P, $[A'B']$ el lado correspondiente de P', y O el punto de intersección de (AA') y (BB'). Entonces,

$$\frac{|A'O|}{|AO|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'O|}{|BO|} = k.$$

De aquí se sigue que en el mismo punto O, la línea BB' corta la línea CC' ($[BC]$ y $[B'C']$ son los lados correspondientes de P y P'), y así sucesivamente. Además, como los lados de P están a distancia

1 de los lados de P', las alturas desde O a los lados del polígono P son todos iguales. De aquí se deduce que el punto O es el centro de un círculo inscrito en P.

□

Problema 24. Demuestre que los puntos simétricos de un punto arbitrario con respecto a los puntos medios de los lados de un cuadrado son vértices de algún otro cuadrado.

Solución. **Pista:** Considere una homotecia con respecto al punto seleccionado con el coeficiente de homotecia igual a 2.

Sea P un punto arbitrario; M, N, K, L son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y AD del cuadrado $ABCD$ respectivamente; P_1, P_2, P_3 y P_4 son las imágenes de punto P mediante simetrías con respecto a los puntos M, N, K y L respectivamente.

Dado que

$$PP_1 = 2PM, PP_2 = 2PN, PP_3 = 2PK, PP_4 = 2PL$$

y además los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 están ubicados en los rayos PM, PN, PK, PL respectivamente, entonces el cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ es homotético al cuadrilátero $MNKL$ con respecto al punto P con un coeficiente de 2, y dado que $MNKL$ es un cuadrado, entonces el cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ también es un cuadrado.

□

Problema 25. Números positivos $x_1, \ldots, x_k$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + \ldots + x_k}{2}, x_1 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

a) Demuestra que $k > 200$.

b) Construye un ejemplo de tales números que satisfaces estas dos desigualidades.

c) Encuentra el valor mínimo de k para el cual es posible un ejemplo.

Solución. a) De acuerdo con la condición

$$4(x_1^2 + \ldots + x_k^2) < 2(x_1 + \ldots + x_k) < x_1^3 + \ldots + x_k^3.$$

Por lo tanto, para al menos un número (supongamos x_1), se cumple la desigualdad $x_1 > 4$. Por lo tanto, $x_1 > 4$. Dado que el mínimo de la función $2x^2 - x$ es $-\frac{1}{8}$, entonces

$$0 > 2(x_1^2 + \ldots + x_k^2) - (x_1 + \ldots + x_k) > 28 - \frac{k-1}{8}.$$

De aquí, $k > 1 + 8 \cdot 28 > 200$.

b) Tomemos $k = 2501$, $x_1 = 10$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2501} = \frac{1}{10}$. Entonces, todas las desigualdades se cumplen.

c) Definamos

$$p(x) = 2x^2 - x,\ q(x) = x^3 - 2x \ \text{ y } f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{x^2 - 2}{2x - 1}.$$

Notemos que la función p es negativa en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$, decrece en el intervalo $(0, \frac{1}{4})$ y aumenta en el intervalo $(\frac{1}{4}, +\infty)$; q decrece en $(0, \frac{1}{2})$; f aumenta en $(-\infty, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, +\infty)$ y es positiva en $(0, \frac{1}{2})$.

Supongamos que k es el mínimo, y los números $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$ cumplen con la condición, es decir, $p(x_1) + \ldots + p(x_k) < 0$, $q(x_1) + \ldots + q(x_k) > 0$. Entonces, $x_{k-1} < \frac{1}{2}$. De lo contrario, podríamos reducir k reemplazando x_{k-1} y x_k por un número $x_0 \geq x_k$ tal que $p(x_0) = p(x_{k-1}) + p(x_k)$. En este caso, la suma de $p(x_i)$ no cambiaría, y la suma de $q(x_i)$ no disminuiría:

$$q(x_0) = f(x_0)p(x_0) = f(x_0)p(x_{k-1}) + f(x_0)p(x_k) \geq f(x_{k-1})p(x_{k-1}) + f(x_k)p(x_k) = q(x_{k-1}) + q(x_k).$$

Ahora, a partir de la solución a) vemos que $x_k > 4$. Luego, sin cambiar k, simplificaremos la secuencia $\{x_i\}$ paso a paso.

Si algún número $x_i \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, lo reemplazamos por $\frac{1}{2} - x_i$. En este caso, la suma de $p(x_i)$ no cambiará, y la suma de $q(x_i)$ no disminuirá. Por lo tanto, podemos asumir que $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \leq \frac{1}{4}$.

Sea $n = k - 1$ y P la media aritmética de $p(x_1), \ldots, p(x_n)$. Reemplacemos cada uno de los números $x_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ con un número $u \in (0, \frac{1}{4}]$ tal que $p(u) = P < 0$. En este caso, la suma de $p(x_i)$ no cambiará. Demostremos que la suma de $q(x_i)$ no disminuirá.

Sea

$$\alpha_i = \frac{p(x_i)}{nP} \text{ y } t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Entonces, por la desigualdad de Jensen y la desigualdad entre las medias, tenemos:

$$p(t) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(x_i) = nP\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq P(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 = P = p(u).$$

Por lo tanto, $t \geq u$. Entonces,

$$nq(u) \geq nq(t) = nf(t)p(t) \geq np(t)\sum_{i=1} \alpha_i f(x_i) = \frac{p(t)}{P}\sum_{i=1}^{n} p(x_i)f(x_i) = \frac{p(t)}{p(u)}\sum_{i=1}^{n} q(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} q(x_i).$$

Queda por determinar el valor mínimo de n para el cual existen $u \leq \frac{1}{2}$ y $v > 4$ tales que

$$2(nu^2 + v^2) < nu + v \text{ y } 2(nu + v) < (nu^3 + v^3).$$

Reescribiremos estas desigualdades como

$$\frac{2v^2 - v}{u - 2u^2} < n < \frac{v^3 - v}{2u - u^2}.$$

De aqui $f(v) > f(u)$. Evaluaremos el valor mínimo que la expresión $\frac{2v^2-v}{u-2u^2}$ puede tener con nuestras restricciones. Este valor será una cota inferior para n. Reduciremos v hasta alcanzar el punto donde $f(v) = f(u)$. Dado que $f(u) > f(0) = 2 = f(4)$, el nuevo valor de v será mayor que 4 y $\frac{2v^2-v}{u-2u^2}$ solo disminuirá.

Ahora, u y v son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 2 = t(2x - 1)$ (donde $t = f(u)$), entonces $u + v = 2t$ y entonces

$$v = 2f(u) - u = \frac{4 - u}{1 - 2u}$$

Por lo tanto después de sustituir v obtenemos

$$g(u) = \frac{2v^2 - v}{u - 2u^2} = \frac{7(4 - u)}{u(1 - 2u)^3}$$

La función $g(u)$ tiene su mínimo en $u_0 = \frac{8-\sqrt{58}}{3} \in (0, \frac{1}{4}]$. Por lo tanto,

$$n > g(u_0) = 514,16\ldots,$$

lo que implica $n \geq 515$ y $k \geq 516$.

Construyamos un ejemplo para $n = 515$. Tomaremos $u = \frac{1}{8}$ (cerca de u_0). El valor correspondiente de v será $5,169$. A medida que incrementemos v, $f(v)$ aumentará y habrá un punto donde $f(v)$ sea mayor que 515 y $g(v)$ sea menor que 515. Nos detendremos en ese valor (por ejemplo, $v = 5,169$ nos sirve).

Respuesta: $k = 516$.

$\square$

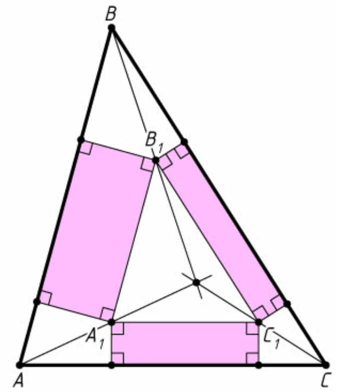
Problema 26. En cada una de las bases AD y BC del trapecio $ABCD$ se construyen triángulos equiláteros fuera del trapecio. Demuestre que el segmento que une los terceros vértices de estos triángulos pasa por el punto de intersección de las diagonales del trapecio.

Solución. **Pista:** Considera una homotecia con respecto al punto de intersección de las diagonales del trapecio, que transforma el punto A en el punto C.

Supongamos que BMC y DNA son los triángulos equiláteros mencionados, y O es el punto de intersección de las diagonales AC y BD del trapecio $ABCD$. Durante la homotecia con respecto al punto O, que lleva el punto A al punto C, el punto D se transforma en el punto B, el segmento AD se convierte en el segmento CB, el rayo AN se convierte en el rayo CM (ya que las rectas AN y CM son paralelas), y el rayo DN se convierte en el rayo BM. Por lo tanto, el punto N se transforma en el punto M. En consecuencia, la recta MN pasa por el centro de la homotecia considerada, es decir, por el punto O.

□

Problema 27. En cada uno de los lados del triángulo ABC, se construye un rectángulo de tal manera que se toquen mutuamente por los vértices (como en la figura).



Demuestra que las líneas que conectan los vértices del triángulo ABC con los vértices correspondientes del triángulo $A_1B_1C_1$ se cruzan en un punto.

Solución. **Pista:** Aplicar la homotecia.

Los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tienen lados que son paralelos entre sí, por lo tanto, son homotéticos. Las líneas que conectan sus vértices correspondientes se cruzan en el centro de esta homotecia.

□

Problema 28. Un cuadrilátero está dividido por sus diagonales en cuatro triángulos. Demuestra que los puntos de intersección de las medianas de estos triángulos forman un paralelogramo.

Solución. **Pista:** Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son vértices de un paralelogramo.

Primero observemos que los puntos medios de los lados de este cuadrilátero son vértices de un paralelogramo (sus lados son paralelos a los diagonales del cuadrilatero).

El cuadrilátero con vértices en los puntos de intersección de las medianas de los triángulos mencionados es homotético a este paralelogramo con respecto al punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero original con el factor de homotécia igual a $\frac{2}{3}$. □

Problema 29. En un prado con forma de cuadrado, hay un agujero circular. Un saltamontes salta por el prado. Antes de cada salto, elige un vértice del cuadrado y salta en esa dirección. La longitud del salto es igual a la mitad de la distancia hasta ese vértice. ¿Podrá el saltamontes llegar al agujero?

Solución. Es suficiente demostrar la siguiente afirmación. Supongamos que cada lado del cuadrado tiene longitud 1 y está dividido en 2^n partes iguales ($n \geq 0$), y se trazan líneas paralelas a los lados a través de los puntos de división. Entonces, el saltamontes podrá llegar a cualquiera de las 4^n celdas obtenidas.

Para $n = 0$, el resultado es trivial. Probemos el resultado por inducción. Así que supongamos que es cierto para n y lo vamos a probar para $n + 1$. Consideremos una de las celdas de tamaño $2^{-n-1} \times 2^{-n-1}$. Elijamos el vértice más cercano a esta celda y realicemos una homotecia con centro en este vértice y el factor de homotecia igual a 2. Entonces, la celda seleccionada se transformará en una de las celdas de tamaño $2^{-n} \times 2^{-n}$. Según la hipótesis inductiva, el saltamontes puede llegar a ella. Si ahora salta a la mitad de la distancia hasta el vértice indicado, caerá en la celda correcta.