PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023–24

Fecha: 17 y 24 de noviembre, 15 de diciembre de 2023.

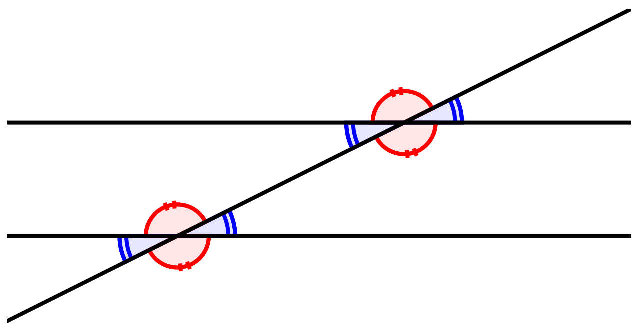
Semejanza, homotecia

Vamos a enunciar algunos resultados y ejemplos de geometría que pueden ser útiles para la resolución de los problemas. Después de cada ejemplo hay un problema para que lo hagáis vosotros. Recomendamos empezar la hoja por estos problemas. También recomendamos traer una regla y compás para realizar los dibujos.

En matemáticas, cualquier teoría comienza con una serie de axiomas a partir de los cuales se demuestran los resultados posteriores. La geometría del plano está regida por los postulados de Euclides:

1. Dos puntos distintos cualquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

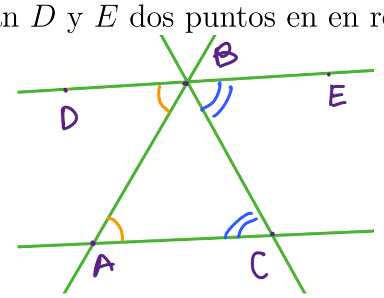
Teorema 1 (Ángulos cortados por rectas paralelas)**.** *Si una recta r corta a dos rectas paralelas s y s', los ángulos que se forman son iguales.*



Omitimos la demostración de este teorema, pero veamos una de sus consecuencias.

Ejemplo resuelto. Demuestra que los ángulos de un triángulo suman 180°.

Solución. Sea ABC un triangulo. Tracemos una recta paralela a la recta AC que pasa por el punto B. Sean D y E dos puntos en en recta a ambos lados de B.

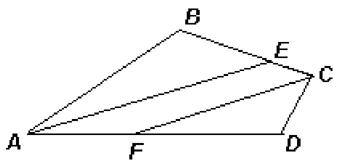


Entonces tenemos que $\angle BAC = \angle ABD$ y $\angle ACB = \angle CBE$. Por lo tanto

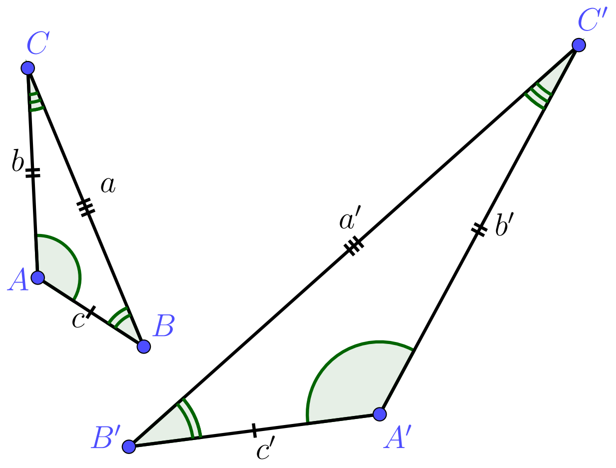
$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°.$$

$\square$

Problema 1. En el cuadrilátero $ABCD$, las bisectrices AE y CF de los ángulos A y C son paralelas (ver figura). Demuestra que los ángulos B y D son iguales.



Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$son **semejantes** si $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$. y también se cumple $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$.

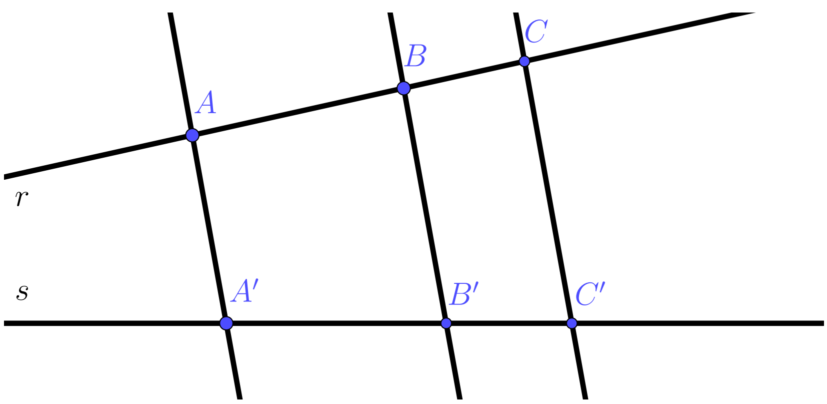


El valor $\alpha = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ se llama el **coeficiente de semejanza**. El siguiente teorema nos dice que es necesario conocer sólo una parte de estas condiciones.

Teorema 2 (Semejanza de triángulos)**.** *Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$, y se cumple una (***cualquiera***) de estas tres condiciones, entonces son semejantes:*

- $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.
- $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.
- $\angle CAB = \angle C'A'B'$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Teorema 3 (Teorema de Tales)**.** *Si dos rectas cualesquiera r y s son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determinan en la recta r son proporcionales a los que determinan en la recta s.*



Es decir,

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$$

Demostración. Sea el punto K la intersección de $A'C$ y BB'. Entonces los triángulos $A'CC'$ y $A'KB'$ son semejantes. Entonces

$$\frac{|A'B'|}{|A'C'|} = \frac{|AK|}{|A'C|}.$$

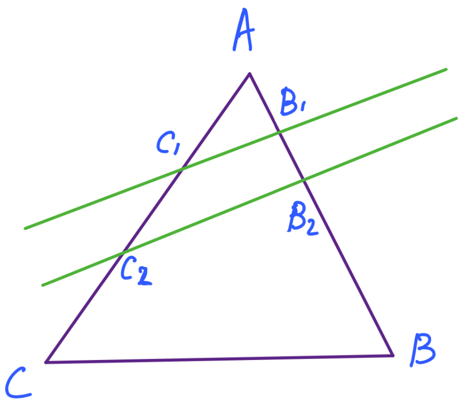
Los triángulos ACA' y BCK son también semejantes. Por eso

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|KC|}{|A'C|} = 1 - \frac{|AK|}{|A'C|} = 1 - \frac{|A'B'|}{|A'C'|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|}.$$

Por lo tanto, $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$. Observemos que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $b \neq d$, entonces $\frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}$. Concluimos que $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$.

□

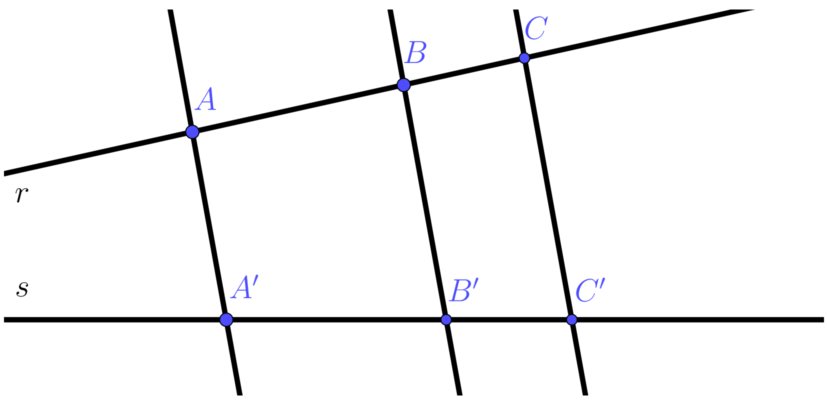
Problema 2. Si dos rectas paralelas cortan el ángulo con el vértice A formando los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2, entonces estos triángulos son semejantes y $\frac{|AB_1|}{|AB_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$ (los puntos B_1 y B_2 están en un lado del ángulo, C_1 y C_2 están en el otro).



Ejemplo resuelto. Demuestra el recíproco del teorema de Tales: Si tenemos el dibujo anterior y sabemos que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|},$$

y que AA' y CC' son paralelas, entonces también son paralelas a BB'.



Pista: considera la paralela a AA' por B, y demuestra que pasa por B'.

Solución. De $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ se sigue que $\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$: recuerda que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces esta fracción también es igual a $\frac{a+c}{b+d}$.

Si seguimos la pista y dibujamos esta recta, cortará a S en un punto X. El teorema de Tales dice que

$$\frac{|AB|}{|A'X|} = \frac{|BC|}{|XC'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},$$

Entonces,

$$|A'X| = \frac{|AB| \cdot |A'C'|}{|BC|} = |A'B'|$$

$$|C'X| = \frac{|BC| \cdot |A'C'|}{|AB|} = |C'B'|$$

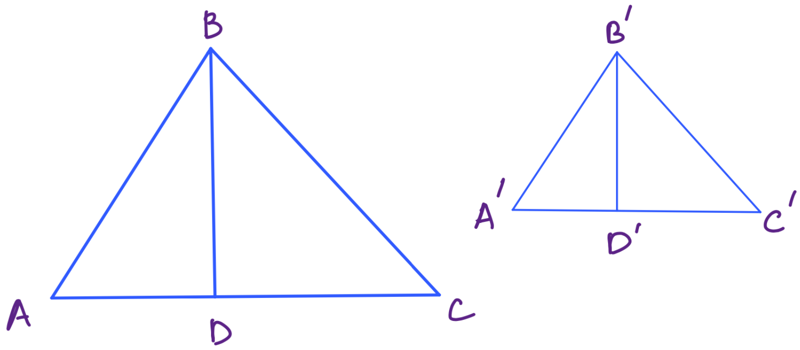
Por lo que tiene que ser $X = B'$.

□

Problema 3. La línea media de un triángulo es el segmento que une los puntos medios de los lados. Demuestra que la línea media es paralela al tercer lado del triángulo y tiene la mitad de su longitud.

Teorema 4. *La relación entre las áreas de triángulos semejantes es igual al cuadrado del coeficiente.*

Demostración. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes con el coeficiente de semejanza igual a α. Sean AD y $A'D'$ alturas en los triángulos ABC y $A'B'C'$, respectivamente.



Observemos que los triángulos BDC y $B'D'C'$ tienen los ángulos correspondientes iguales y por lo tanto son semejantes con el coeficiente de semejanza igual a $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \alpha$. Entonces, $\frac{|BD|}{|B'D'|} = \alpha$. Concluimos que

$$\frac{Area_{ABC}}{Area_{A'B'C'}} = \frac{|AC||BD|}{|A'C'||B'D'|} = \alpha^2.$$

□

Problema 4. A través de los puntos M y N, que dividen el lado AB del triángulo ABC en tres partes iguales, se han trazado líneas paralelas al lado AC. Encuentra el área de la parte del triángulo comprendida entre estas líneas, si el área del triángulo ABC es igual a 1.

Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$son **congruentes** ó **iguales** si $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$ y también se cumple $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$. Ees decir, son congruentes con el coeficiente de congruencia 1.

Ejemplo resuelto (Congruencia de triángulos)**.** Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$, y se cumple alguna de estas tres condiciones (**cualquiera**), entonces son congruentes:

- $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$.
- $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, \angle ABC = \angle A'B'C'$.
- $|AB| = |A'B'|, \angle CAB = \angle C'A'B', \angle ABC = \angle A'B'C'$.

Solución. El Teorema 2 implica que en los tres casos los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y la condición $|AB| = |A'B'|$ que el coeficiente de semejanza es 1. □

La construcción con regla y compás es el trazado de puntos, segmentos de recta y ángulos usando exclusivamente una regla y compás (sin escuadra, cartabón, ni transportador de ángulos). Todas las construcciones con regla y compás son aplicaciones sucesivas de dos construcciones básicas:

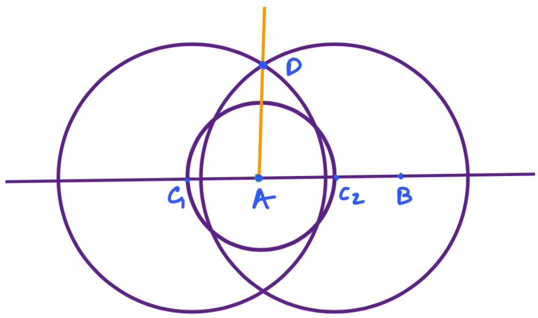
1. Dados dos puntos A y B, crear la recta que une estos dos puntos.
2. Dados tres puntos A, B y C, crear la circunferencia con centro en A y radio $|BC|$.

Con estas construcciones obtenemos puntos nuevos como puntos de intersección de rectas y circunferencias construidas.

Mientras lees la solución al siguiente ejemplo resuelto, reproduce lo que dice en tu cuaderno usando regla y compás, para acostumbrarte.

Ejemplo resuelto. Dados dos puntos A y B distintos, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto A.

Solución. El procedimiento es el siguiente:



1. Trazamos una circunferencia con el centro A que interseca AB en los puntos C_1 y C_2 (en particular, $|AC_1| = |AC_2|$).
2. Escogemos un radio $r > |AC_1|$ y trazamos dos circunferencias de radio r con centros C_1 y C_2. Sea D el punto de intersección (en particular, $|DC_1| = |DC_2|$).
3. La recta AD es perpendicular a AB.

Para ver que la construcción es correcta, observemos que los triángulos AC_1D y AC_2D son congruentes ya que tienen los lados correspondientes iguales ($|AC_1| = |AC_2|$ ya lo sabíamos, al igual que $|DC_1| = |DC_2|$, y el lado AD es común a ambos triángulos). Entonces $\angle DAC_1 = \angle DAC_2$. Además, $\angle DAC_1 + \angle DAC_2 = 180°$, por lo que

$$\angle DAC_1 = \angle DAC_2 = 90°.$$

□

Problema 5. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto C.

Problema 6. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta paralela a la recta AB y que pasa por el punto C.

Problema 7. Sea $n \geq 2$. Explica por qué funciona la siguiente construcción con regla y compás para dividir un segmento AB en n partes iguales.

1. Trazar una semirrecta l que pasa por A y no tiene la dirección de AB.

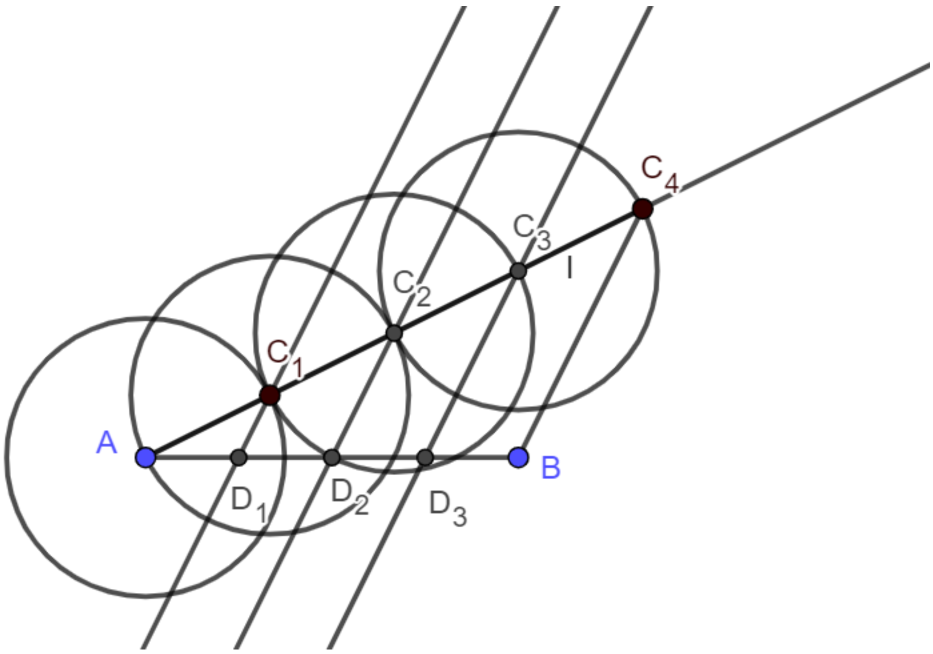
2. Fijamos un radio R cualquiera con nuestro compás y trazamos la circunferencia con centro A y radio R. Llamamos C_1 a uno de los puntos de intersección de l con esta circunferencia.

3. Para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, trazamos una circunferencia con centro C_i y radio R, y llamamos C_{i+1} al punto de intersección distinto de C_{i-1} de esta circunferencia con la recta l (donde $C_0 = A$).

4. Para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, trazamos la recta paralela a C_nB que pasa por C_i, y llamamos D_i al punto de intersección de esta recta paralela con el segmento AB.

5. Los puntos $D_1, \ldots, D_{n-1}$ dividen el segmento AB en n partes iguales, con $|AD_1| = |D_1D_2| = |D_2D_3| = \ldots = |D_{n-1}B|$.

El dibujo de la construcción está hecho para $n = 4$ en la siguiente figura, en la que se han dibujado las rectas paralelas resultantes de la construcción del paso 4 pero no se han dibujado los pasos intermedios del paso 4:



La **homotecia** con centro en un punto O y coeficiente k es una transformación geométrica que lleva cada punto A a un punto A_1 tal que A_1 está en la recta OA y $|OA_1| = k \cdot |OA|$. Si k es positivo, A y A_1 están en el mismo lado del punto O, si k es negativo, están en los lados opuestos.

La homotecia lleva una recta a una recta que es paralela a ella. Por eso la homotecia conserva angulos y lleva triangulos a sus semejantes con el coeficiente de semejanza $|k|$, donde k es el coeficiente de la homotecia.

Ejemplo resuelto. Sea ABC un triangulo y M la intersección de sus meridianas. Entonces la homotecia con centro M y coeficiente $-\frac{1}{2}$ lleva A al punto medio del lado BC.

Solución. Sea D el punto medio de BC. Entonces M divide AD en proporción $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{2}{1}$. □

Problema 8. Demuestra que tres rectas trazadas a través de los puntos medios de los lados de un triángulo y paralelas a las bisectrices de los ángulos opuestos, se intersecan en un solo punto.

Pista Intenta usar homotecia con centro en la intersección de medianas del triangulo y coeficiente $-\frac{1}{2}$.

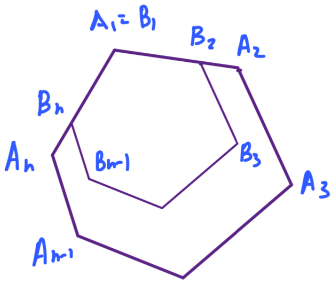
Hemos definido el concepto de triángulos semejantes. Hablando de manera informal, objetos semejantes son aquellos que tienen la misma forma, pero (posiblemente) diferentes tamaños. Los polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ y $B_1B_2 \ldots B_n$ se llaman semejantes si

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \ldots = \frac{|A_nA_1|}{|B_nB_1|}$$

y los ángulos en las vértices A_1, A_2, $\ldots$, A_n son respectivamente iguales a los ángulos en las vértices B_1, B_2, $\ldots$, B_n.

Ejemplo resuelto. La proporción entre las diagonales correspondientes de polígonos semejantes es igual al coeficiente de semejanza.

Solución. Sean $A_1A_2 \ldots A_n$ y $B_1B_2 \ldots B_n$ dos polígonos semejantes. Los podemos dibujar de tal forma que $A_1 = B_1$, B_2 esta en el rayo AA_2 y B_n está en el rayo AA_n.



Entonces la homotetia con el centro en el punto A y coeficiente $\frac{|A_1A_2|}{|BB_1|}$ lleva el polígono $B_1B_2 \ldots B_n$ al polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ y las diagonales de $B_1B_2 \ldots B_n$ a las diagonales correspondientes de $A_1A_2 \ldots A_n$. □

Problema 9. Dentro del cuadrado $ABCD$ se encuentra un punto M. Demuestra que los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABM, BCM, CDM y DAM forman un cuadrado.

Pista: Aplica homotecia.

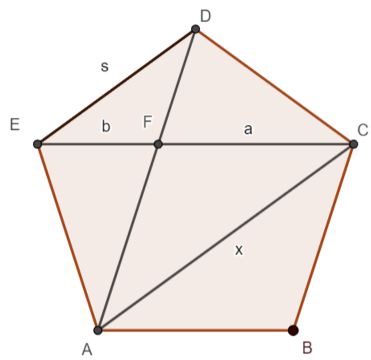
Problema 10. La línea media de un trapecio se refiere al segmento que conecta los puntos medios de los lados del trapecio. Demuestra que la línea media de un trapecio es paralela a las bases y es igual a la mitad de la suma de sus longitudes.

Problema 11. Demuestra que el hexágono regular de lado s está inscrito en una circunferencia de radio s. Usa esto para describir cómo, a partir de una longitud s dada, podemos construir con regla y compás un hexágono regular de lado s.

Problema 12. Demuestra que si tenemos dibujado en un papel un polígono regular de n lados y nos dan una longitud s, podemos dibujar a partir de él un polígono regular de n lados cuyo lado mide s con regla y compás.

Problema 13. Nos dan un segmento de longitud s en un papel. El objetivo de este problema es llegar a dibujar con regla y compás un pentágono regular cuyo lado tiene longitud s.

a) En el pentágono regular $ABCDE$ de lado s siguiente hemos dibujado las diagonales AD, AC y EC. Las diagonales AD y EC se cortan en el punto F.



Sea x la longitud de cualquiera de las diagonales de este pentágono, sea $a = |FC|$ y $b = |EF|$. Demuestra que $a = s$ y $b = x - s$.

b) ¿Cuánto mide cada una de las diagonales de un pentágono regular de lado s? Usa que los triángulos EDF y FCA son semejantes en el dibujo anterior.

c) Explica cómo, a partir de un segmento de longitud s dibujado en un papel, podemos encontrar un segmento de la longitud hallada en el apartado b) usando regla y compás.

d) Construye un pentágono regular de lado s con regla y compás.

Problema 14. Un trapecio tiene una altura (distancia entre los dos lados paralelos) de 12 cm y sus diagonales miden 13 y 15 cm respectivamente. Determina todas las áreas posibles de este trapecio.

Problema 15. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B. ¿Cómo podemos dibujar una recta paralela a AB que pase por P?

Problema 16. Supongamos que tenemos una regla sin ninguna marca de medida y no tenemos un compás ni ninguna otra regla. Nos dan dibujados en un papel un segmento AB, su punto medio O, la circunferencia de diámetro AB y un punto P que no está en la línea recta que pasa por A y por B ni en la circunferencia dada. ¿Cómo podemos dibujar una recta perpendicular a AB que pase por P?

Problema 17. Consideramos n números reales $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_n > 0$, con $n \geq 3$. Supongamos que $L_1 < L_2 + L_3 + \ldots + L_n$. Demuestra que existe un polígono de n lados inscrito[1] en una circunferencia tal que las longitudes de sus n lados son $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

Problema 18. Azucena y Bárbara son rivales jugando al siguiente juego: se colocan junto a otras 2023 personas formando un círculo, pero no sabemos cuántas personas tienen entre ellas dos. Las dos se turnan haciendo jugadas, y en cada jugada la jugadora a la que le toca jugar quita del círculo a uno de sus dos vecinos (el que quiera). Gana la primera jugadora que quita a su rival del círculo. Empieza jugando Azucena. ¿Podemos determinar qué jugadora tiene estrategia ganadora, es decir, qué jugadora puede ganar haga lo que haga la otra?

Problema 19. Una escalera está apoyada en una pared vertical. La escalera empieza estando vertical, pero se va deslizando hacia abajo hasta que acaba horizontal en el suelo. Al deslizarse, la parte de arriba de la escalera siempre está tocando la pared y la parte de abajo siempre está tocando el suelo. Describe la trayectoria trazada por el punto medio de la escalera durante este proceso, justificando tu respuesta.

Problema 20. Dados tres puntos no alineados, describe un procedimiento que puedas realizar con regla y compás para hallar la circunferencia que contiene a los tres puntos. Demuestra que el procedimiento que has descrito funciona. ¿Puede haber otra circunferencia que contenga a los tres puntos?

Problema 21. Con la ayuda de un compás y una regla, construye un cuadrado a partir de cuatro puntos ubicados en sus cuatro lados.

Problema 22. Sean h_1, h_2, h_3 las alturas de un triángulo y r el radio del circunferencia inscrita en el triángulo. Demuestra que

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r.$$

Problema 23. Un polígono convexo tiene la siguiente propiedad: si todas las rectas en las que yacen sus lados se trasladan hacia afuera en paralelo a una distancia de 1, las rectas resultantes forman un polígono semejante al original, y los lados paralelos serán proporcionales. Demuestra que se puede inscribir un círculo en dicho polígono.

(Es mucho más fácil demostrar la afirmación inversa: si se puede inscribir un círculo en el polígono, al alejar todos sus lados a una misma distancia (en particular, a una unidad), se obtiene un polígono semejante, donde el centro de homotecia es el centro del círculo.)

Problema 24. Demuestre que los puntos simétricos de un punto arbitrario con respecto a los puntos medios de los lados de un cuadrado son vértices de algún otro cuadrado.

[1] Se dice que un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están en la circunferencia.

Problema 25. Números positivos $x_1, \ldots, x_k$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + \ldots + x_k}{2}, x_1 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

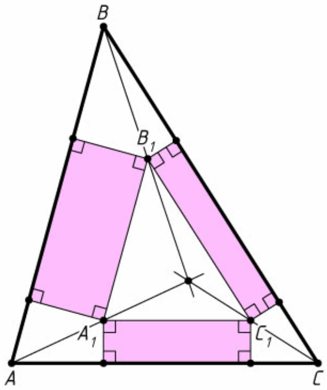
a) Demuestra que $k > 200$.

b) Construye un ejemplo de tales números que satisfaces estas dos desigualidades.

c) Encuentra el valor mínimo de k para el cual es posible un ejemplo.

Problema 26. En cada una de las bases AD y BC del trapecio $ABCD$ se construyen triángulos equiláteros fuera del trapecio. Demuestre que el segmento que une los terceros vértices de estos triángulos pasa por el punto de intersección de las diagonales del trapecio.

Problema 27. En cada uno de los lados del triángulo ABC, se construye un rectángulo de tal manera que se toquen mutuamente por los vértices (como en la figura).



Demuestra que las líneas que conectan los vértices del triángulo ABC con los vértices correspondientes del triángulo $A_1B_1C_1$ se cruzan en un punto.

Problema 28. Un cuadrilátero está dividido por sus diagonales en cuatro triángulos. Demuestra que los puntos de intersección de las medianas de estos triángulos forman un paralelogramo.

Problema 29. En un prado con forma de cuadrado, hay un agujero circular. Un saltamontes salta por el prado. Antes de cada salto, elige un vértice del cuadrado y salta en esa dirección. La longitud del salto es igual a la mitad de la distancia hasta ese vértice. ¿Podrá el saltamontes llegar al agujero?