PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023–24

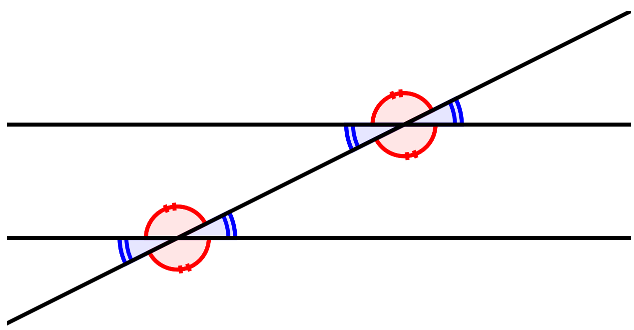
Fecha: 17 y 24 de noviembre, 1 de diciembre de 2023. **Hoja 3 - Marte y Neptuno**

Ángulos, triángulos y semejanza

Vamos a enunciar algunos resultados y ejemplos de geometría que pueden ser útiles para la resolución de los problemas. Después de cada ejemplo hay uno o varios problemas para que practiquéis unos resultados concretos. **Lee la hoja, y empieza resolviendo los ejercicios del 1 al 10 en orden**. A partir del ejercicio 11, puedes resolverlos en el orden que quieras. **También recomendamos traer una regla y compás para realizar los dibujos.**

> Como en todas las hojas, el objetivo es que aprendáis a justificar por qué vuestros argumentos son correctos, no en llegar a la solución correcta sin preocuparnos del proceso. En geometría, a veces podemos tener la tentación de ver un dibujo y sacar conclusiones de él del tipo "este ángulo es recto" o "estos dos triángulos son iguales". Sin embargo, **los dibujos están sólo para darnos intuición, pero no son una demostración**, ya que siempre hay errores de redondeo si medimos algo con una regla o con un transportador de ángulos. **Tenéis que poder justificar por qué todos los pasos que hagáis son ciertos a partir de los teoremas que enunciamos en esta hoja**. Vuestros profesores estarán encantados de ayudaros a formalizar estos argumentos, pero **no vale decir "esto no lo sé hacer" sin haberlo intentado**.

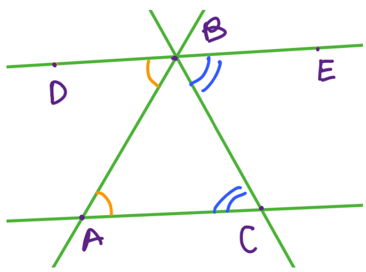
Teorema 1 (Ángulos cortados por rectas paralelas)**.** *Si una recta r corta a dos rectas paralelas s y s', los ángulos que se forman son iguales.*



Omitimos la demostración de este teorema, pero veamos una de sus consecuencias.

Ejemplo resuelto. Demuestra que los ángulos de un triángulo suman 180°.

Solución. Sea ABC un triángulo. Tracemos una recta paralela a la recta AC que pasa por el punto B. Sean D y E dos puntos en en recta a ambos lados de B.



Entonces, el Teorema 1 nos dice que $\angle BAC = \angle ABD$ y $\angle ACB = \angle CBE$. Por lo tanto

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°,$$

donde la última igualdad es cierta porque D, B y E están alineados. □

En el ejemplo anterior, hemos deducido la solución a partir del Teorema 1. Para el siguiente ejercicio puedes usar tanto el Teorema 1 como el resultado del ejemplo anterior. En general, **para justificar los ejercicios de esta hoja puedes usar los teoremas enunciados en esta hoja y los resultados de otros ejercicios de la hoja que ya hayas resuelto**.

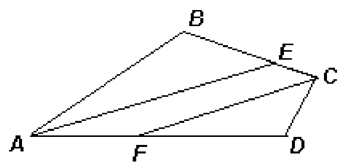
Problema 1. Demuestra que los ángulos de un cuadrilátero suman 360°.

Solución. Podemos trazar una diagonal del cuadrilátero para dividirlo en dos triángulos. La suma de los ángulos de estos dos triángulos es $180° + 180° = 360°$ y coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero. □

Problema 2. Demuestra que dos ángulos contiguos de un paralelogramo suman 180°.

Solución. Es consecuencia del Teorema 1, donde la suma de un ángulo rojo y uno azul suman 180°. □

Problema 3. En el cuadrilátero $ABCD$, las bisectrices AE y CF de los ángulos A y C son paralelas (ver figura). Demuestra que los ángulos B y D son iguales[1].

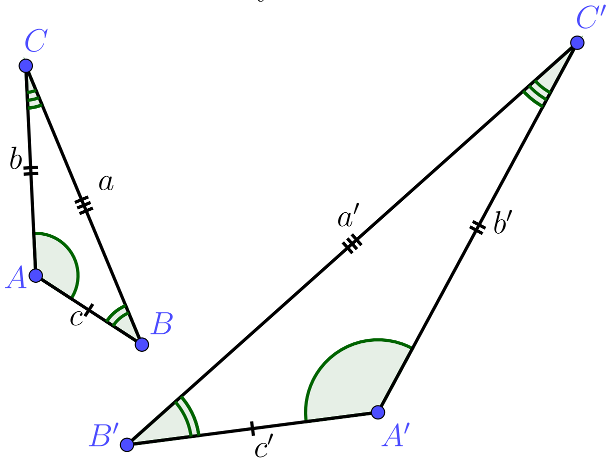


Solución. De la condición y la igualdad de los ángulos correspondientes en rectas paralelas, se deduce que $\angle CFD = \angle EAD = \angle EAB$ y que $\angle BEA = \angle BCF = \angle DCF$. Por lo tanto, dos ángulos del triángulo ABE son respectivamente iguales a dos ángulos del triángulo CDF. Por lo tanto, también son iguales los terceros ángulos de estos triángulos: $\angle ABE = \angle CDF$. □

Definición. Decimos que dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Es decir, dos triángulos son semejantes si existe una forma de etiquetar sus vértices como ABC y $A'B'C'$ de manera que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

y que $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\quad \angle CAB = \angle C'A'B'$ $\quad$ y $\quad \angle BCA = \angle B'C'A'$.



[1] El argumento que des tiene que valer para todo cuadrilátero $ABCD$ en el que las bisectrices AE y CF de los ángulos A y C son paralelas, no sólo para el cuadrilátero del dibujo.

El valor $k = \dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$ se llama el **coeficiente de semejanza**.

Definición. Decimos que dos triángulos son **congruentes** si tienen la misma forma (ángulos correspondientes iguales) y el mismo tamaño (lados correspondientes iguales). En otras palabras, dos triángulos son congruentes si son semejantes y su coeficiente de semejanza es $k = 1$.

El siguiente teorema nos dice que es necesario conocer sólo una parte de las condiciones que determinan la semejanza de triángulos.

Teorema 2 (Semejanza de triángulos)**.** *Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$, y se cumple una (***cualquiera***) de estas tres condiciones, entonces son semejantes:*

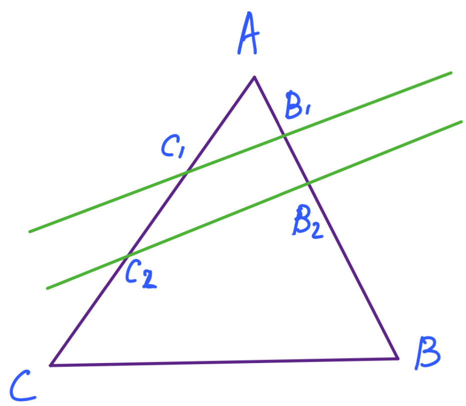
- $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$.
- $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.
- $\angle CAB = \angle C'A'B'$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Problema 4. Explica en tus propias palabras lo que significan cada una de las tres condiciones del Teorema 2.

Problema 5. Encuentra dos triángulos tales que dos de los lados del primero son iguales a dos de los lados del segundo, que además tienen un ángulo igual, pero que no son congruentes. Compara esto con la segunda condición del Teorema 2.

Solución. El triángulo de lados 1, 1 $\sqrt{2}$ es recto e isósceles. El triángulo de lados 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ es recto (satisface el teorema de Pitágoras), pero no isósceles. Estos dos triángulos tienen dos lados iguales y un ángulo igual y no son semejantes. $\square$

Problema 6. Demuestra que si dos rectas paralelas cortan el ángulo con el vértice A formando los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2, entonces estos triángulos son semejantes y $\frac{|AB_1|}{|AB_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$ (los puntos B_1 y B_2 están en un lado del ángulo, C_1 y C_2 están en el otro).



Solución. El Teorema 1 nos dice que $\angle AB_1C_1 = \angle AB_2C_2$. Además, $\angle C_1AB_1 = \angle C_2AB_2$. Por la tercera condición del Teorema 2 los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2 son semejantes. Por lo tanto, $\frac{|AB_1|}{|AB_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$. $\square$

Problema 7. Tenemos dos cuadriláteros, $ABCD$ y $A'B'C'D'$. Decimos que son congruentes si todos sus lados y ángulos correspondientes son iguales ($|AB| = |A'B'|$, $\angle ABC = \angle A'B'C' \dots$). Demuestra[2]:

- Si los lados correspondientes son iguales, no tienen por qué ser congruentes.

[2]Para demostrar que un enunciado no siempre es cierto basta encontrar un ejemplo en el que no lo es.

- Si los lados correspondientes son iguales y además $|AC| = |A'C'|$, entonces tampoco tienen por qué ser congruentes.

- (Más difícil) Si los lados correspondientes son iguales y además un par de ángulos correspondientes son iguales, entonces sí tienen que ser congruentes.

¿Por qué las torres del tendido eléctrico y la torre Eiffel están hechas de triángulos y no cuadriláteros?

Solución. • Un rombo de ángulos $45°, 135°, 45°, 135°$ y lado 1 no es congruente a un cuadrado de lado 1.

- Un cuadrilátero de lados $|AB| = \sqrt{2}, |BC| = \sqrt{2}, |CD| = 1, |AD| = 1$ y tal que $|AC| = \sqrt{2}$ puede tener ángulos $\angle A = 15°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 15°$ y $\angle D = 270°$ o $\angle A = 105°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 105°$ y $\angle D = 90°$.

- Empezamos dibujando los cuadriláteros a partir de los ángulos correspondientes que tienen iguales (digamos $\angle A$ y $\angle A'$), con los lados correspondientes iguales. Fijando el vértice del ángulo, y suponiendo que los vértices $ABCD$ y $A'B'C'D'$ se recorren en el sentido contrario de las agujas del reloj (cosa que siempre se puede asumir después de reflejar el polígono) esto determina dos (B, D y B', D') de los otros tres vértices del cuadrilátero. Si el otro par de ángulos correspondientes que tienen iguales no son los opuestos por la diagonal al par de ángulos inicial, el hecho de que los lados correspondientes sean iguales determina la posición del cuarto vértice. Supongamos que el otro par de ángulos correspondientes que tienen iguales son los opuestos por la diagonal al par de ángulos inicial (es decir, son $\angle C$ y $\angle C'$). Trazamos desde B una circunferencia de radio $|BC|$, y desde D una circunferencia de radio $|DC|$. Estas dos circunferencias se cortan en dos puntos, C y C_2. Si ABC_2D no es un cuadrilátero en el que los vértices se recorren en el sentido contrario a las agujas del reloj, acabamos de demostrar que la posición de A, B y D determina la de C bajo las condiciones del enunciado, y por tanto $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son congruentes. Si ABC_2D es un cuadrilátero en el que los vértices se recorren en el sentido contrario a las agujas del reloj, el ángulo interior $\angle DC_2B$ del cuadrilátero ABC_2D y el ángulo interior $\angle DCB$ del cuadrilátero ABD son opuestos, ya que los triángulos BCD y BC_2D son congruentes al tener los tres lados iguales. Por tanto, el hecho de que $\angle C$ en el cuadrilátero $ABCD$ sea mayor o menor que $180°$ determina completamente la posición de C a partir de los datos del enunciado. Así, si $\angle C = \angle C'$, los cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ serán congruentes.

Porque si fijas las longitudes de los lados, eso no fija los ángulos, por lo que si estuvieran construidas de cuadriláteros no serían rígidas. □

Problema 8. Sea ABC un triángulo, sea M el punto medio del segmento AB y sea N el punto medio del segmento AC. Demuestra que el segmento MN es paralelo al segmento BC y que $|BC| = 2|MN|$.

Solución. Los triángulos ABC y AMN tienen dos lados correspondientes proporcionales ($\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|AN|} = 2$) y estos lados delimitan el mismo ángulo, por lo que la segunda condición del Teorema 2 nos dice que los triángulos ABC y AMN son semejantes. En particular,

$$2 = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|BC|}{|MN|},$$

por lo que $|BC| = 2|MN|$.

Consideramos la paralela a BC que pasa por M, y sea N' el punto de intersección de esta recta paralela con la recta AC. Por el Teorema 1, $\angle ABC = \angle AMN'$ y $\angle BCA = \angle MN'A$, por lo que la tercera condición del Teorema 2 nos dice que ABC y AMN' son semejantes. Por tanto, AMN y AMN' son semejantes, y como tienen lados correspondientes que son iguales (AM), tenemos que AMN y AMN' son congruentes. En particular, $|AN| = |AN'|$, y como tanto N' como N están en el segmento AC, tiene que ocurrir que $N = N'$. Por tanto, $MN = MN'$ es paralela a BC. □

Problema 9. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes y sea k su coeficiente de semejanza, es decir,

$$k = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

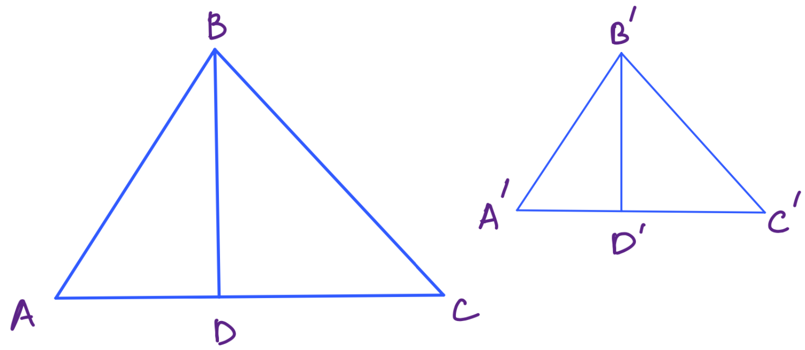
a) Sea D el pie de la altura del triángulo ABC que sale del vértice B, y sea D' el pie de la altura del triángulo $A'B'C'$ que sale del vértice B'. Demuestra que

$$\frac{|BD|}{|B'D'|} = k.$$

b) Demuestra que

$$\frac{\text{Área}_{ABC}}{\text{Área}_{A'B'C'}} = k^2.$$

Solución.



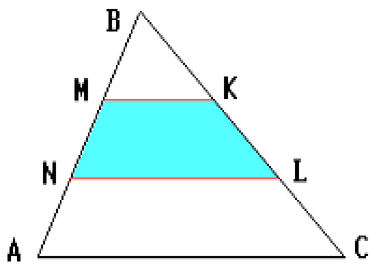
Observemos que los triángulos BDC y $B'D'C'$ tienen dos ángulos correspondientes iguales (los correspondientes a los vértices D y D' son rectos por ser BD y $B'D'$ alturas, y los correspondientes a C y C' son iguales por ser los triángulos ABC y $A'B'C'$ semejantes). Por la tercera condición del Teorema 2, los triángulos BDC y $B'D'C'$ son semejantes, y su coeficiente de semejanza es igual a $\frac{|BD|}{|B'D'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k$. Concluimos que

$$\frac{\text{Área}_{ABC}}{\text{Área}_{A'B'C'}} = \frac{\frac{|AC||BD|}{2}}{\frac{|A'C'||B'D'|}{2}} = \frac{|AC|}{|A'C'|}\frac{|BD|}{|B'D'|} = k^2.$$

□

Problema 10. A través de los puntos M y N, que dividen el lado AB del triángulo ABC en tres partes iguales, se han trazado líneas paralelas al lado AC. Encuentra el área de la parte del triángulo comprendida entre estas líneas, si el área del triángulo ABC es igual a 1.

Solución. Tenemos que $|AN| = |NM| = |MB|$. Sean los puntos K y L en el lado BC de tal forma que MK, NL y AC son paralelos.



Entonces, los triángulos ABC, NBL y MBK son semejantes. El coeficiente de semejanza entre ABC y NBL es $\frac{|AB|}{|NB|} = \frac{3}{2}$, y el coeficiente de semejanza entre ABC y MBK es $\frac{|AB|}{|MB|} = \frac{3}{1} = 3$. Por lo tanto, el ejercicio anterior nos dice que

$$\text{Área}_{BNL} = \frac{4}{9}\text{Área}_{ABC}, \quad \text{Área}_{BMK} = \frac{1}{9}\text{Área}_{ABC}.$$

Entonces,

$$\text{Área}_{MKLN} = \text{Área}_{BNL} - \text{Área}_{BMK} = \frac{4}{9}\text{Área}_{ABC} - \frac{1}{9}\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{3}\text{Área}_{ABC} = 1/3.$$

□

La construcción con regla y compás es el trazado de puntos, segmentos de recta y ángulos **usando exclusivamente una regla y compás (sin escuadra, cartabón, ni transportador de ángulos)**. Todas las construcciones con regla y compás son aplicaciones sucesivas de dos construcciones básicas:

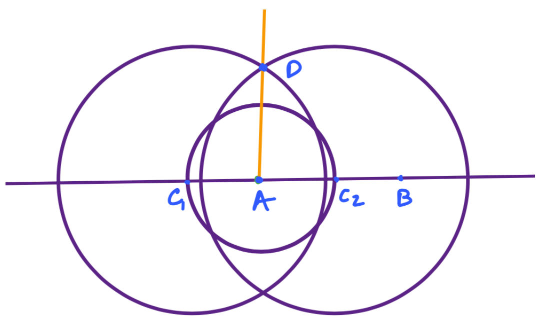
1. Dados dos puntos A y B, crear la recta que une estos dos puntos.
2. Dados tres puntos A, B y C, crear la circunferencia con centro en A y radio $|BC|$.

Con estas construcciones obtenemos puntos nuevos como puntos de intersección de rectas y circunferencias construidas.

Mientras lees la solución al siguiente ejemplo resuelto, reproduce lo que dice en tu cuaderno usando regla y compás, para acostumbrarte.

Ejemplo resuelto. Dados dos puntos A y B distintos, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto A.

Solución. El procedimiento es el siguiente:



1. Trazamos una circunferencia con el centro A que interseca AB en los puntos C_1 y C_2 (en particular, $|AC_1| = |AC_2|$).
2. Escogemos un radio $r > |AC_1|$ y trazamos dos circunferencias de radio r con centros C_1 y C_2. Sea D el punto de intersección (en particular, $|DC_1| = |DC_2|$).
3. La recta AD es perpendicular a AB.

Para ver que la construcción es correcta, observemos que los triángulos AC_1D y AC_2D son congruentes ya que tienen los lados correspondientes iguales ($|AC_1| = |AC_2|$ ya lo sabíamos, al igual que $|DC_1| = |DC_2|$, y el lado AD es común a ambos triángulos). Entonces $\angle DAC_1 = \angle DAC_2$. Además, $\angle DAC_1 + \angle DAC_2 = 180°$, por lo que

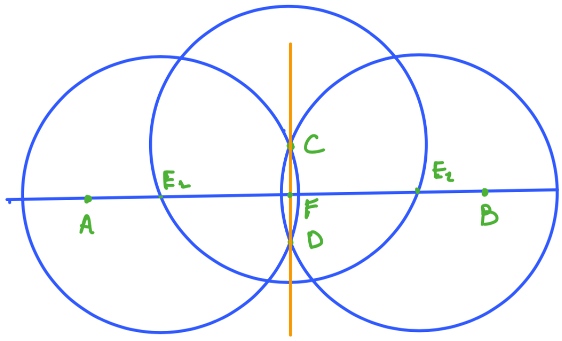
$$\angle DAC_1 = \angle DAC_2 = 90°.$$

□

Asegúrate de haber entendido el ejemplo resuelto anterior antes de intentar el siguiente problema.

Problema 11. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto C.

Solución. El procedimiento es el siguiente:



1. Trazamos una circunferencia con el centro C que interseca AB en los puntos E_1 y E_2 (en particular, $|CE_1| = |CE_2|$).
2. Con el mismo radio trazamos dos circunferencias con centros E_1 y E_2. Sea D el otro punto de intersección (en particular, $|DE_1| = |DE_2| = |CE_1| = |CE_2|$).
3. La recta CD es perpendicular a AB.

Veamos que en efecto, la recta CD es perpendicular a AB. Sea F la intersección de AB y CD. Para ver que la construcción es correcta, observemos que los triángulos CE_1D y CE_2D son congruentes ya que tienen los lados correspondientes iguales. Entonces $\angle E_1CF = \angle E_2CF$. Por la condición 2 del Teorema 2 los triángulos E_1CF y E_2CF son también semejantes, y como tienen coeficiente de semejanza $k = 1$, son congruentes. Entonces $\angle E_1FC = \angle E_2FC$, y como $\angle E_1FC + \angle E_2FC = 180°$, obtenemos que

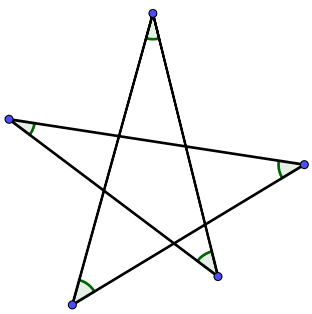
$$\angle E_1FC = \angle E_2FC = 90°.$$

□

Problema 12. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta paralela a la recta AB y que pasa por el punto C.

Solución. Usando el Problema 11, trazamos la recta r que es perpendicular a AB y pasa por C. Usando el ejemplo resuelto anterior, trazamos la recta perpendicular a r que pasa por C. La recta resultante es paralela a AB y pasa por C. □

Problema 13. Encuentra la suma de los ángulos de las puntas de una estrella de 5 puntas.



Solución. La suma de los ángulos del pentágono interior es $540°$. Si llamamos a, b, c, d, e a estos 5 ángulos, los 10 ángulos que no están marcados en los 5 triángulos suman

$$2 \cdot (180° - a) + 2 \cdot (180° - b) + \cdots = 10 \cdot 180^{\cdot} - 2(a + b + c + d + e) = 10 \cdot 180° - 6 \cdot 180° = 4 \cdot 180°.$$

Como esta suma junto con la suma que buscamos es la suma de ángulos de 5 triángulos, es decir $5 \cdot 180°$, los 5 ángulos de las puntas suman $180°$.

□

Problema 14. Demuestra que el hexágono regular de lado s está inscrito[3] en una circunferencia de radio s. Usa esto para describir cómo, a partir de una longitud s dada, podemos construir con regla y compás un hexágono regular de lado s.

Solución. El ángulo interior de un hexágono regular es $120°$. Si trazamos las bisectrices a dos ángulos consecutivos del hexágono, estas se cortan en un punto O. Uniendo O con todos los vértices, el hexágono queda dividido en 6 triángulos equiláteros de lado s. La circunferencia de centro O y radio s contiene a todos los vértices del hexágono.

Para construir un hexágono de lado s, trazamos una circunferencia de radio s. Marcamos un punto en la circunferencia, y a partir de él y en sentido antihorario, marcamos sucesivamente otros puntos que están en la circunferencia y a distancia s del anterior. De esta manera marcaremos los 6 vértices de un hexágono de lado s.

□

Problema 15. Una cuadrícula está formada por cuadrados de lado 1. Dibujamos un polígono en la cuadrícula cuyos lados están en líneas de la cuadrícula. Determina todos los posibles perímetros que se pueden obtener con este tipo de polígonos.

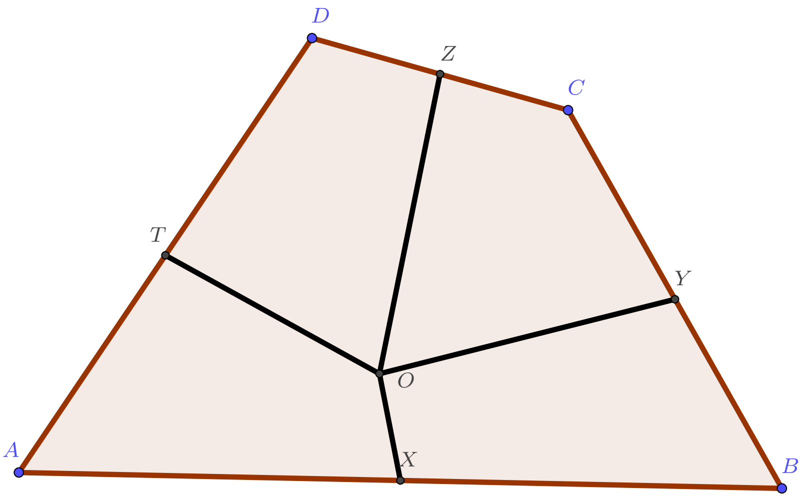
Solución. La respuesta es todos los enteros pares mayores o iguales que 4. Todos los perímetros de estos polígonos son pares, porque todo lo que avanzamos en una dirección (vertical u horizontal) lo tenemos que acabar retrocediendo para llegar al punto de partida, y por tanto la suma de las longitudes de todos los lados verticales será par, y lo mismo con todos los lados horizontales. No puede haber ningún polígono de estos con perímetro 2, ya que cada lado tiene longitud ≥ 1 y un polígono tiene 3 o más lados.

Un rectángulo $1 \cdot n$ tiene perímetro $2n + 2$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, se alcanzan todos los enteros pares mayores o iguales que 4.

□

Problema 16. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo cualquiera, y sea O un punto de su interior. Si unimos O con las cuatro puntos medios de los lados X, Y, Z y T se forman cuatro cuadriláteros, $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ y $OTAX$.

Demostrar que la suma de las áreas de los cuadriláteros $OTAX$ y $OYCZ$ es la misma que la suma de las áreas de los cuadriláteros $OXBY$ y $OZDT$.



[3]Un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están en la circunferencia.

Solución. Los triángulos AXO y XBO tienen la misma área por tener la misma longitud de las bases ($|AX| = |XA|$) y la misma altura (la distancia de O al segmento AB). Similarmente, los triángulos BYO y COY tienen la misma área, CZO y ZDO también, y DTO y TAO también. Por tanto, la suma de las áreas de los cuadriláteros $OTAX$ y $OYCZ$ es la misma que la suma de las áreas de los cuadriláteros $OXBY$ y $OZDT$.

□

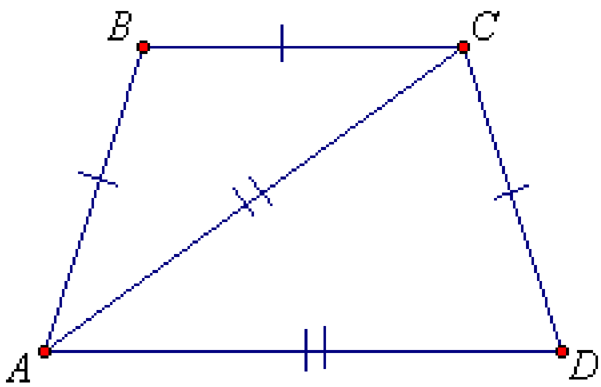
Problema 17. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AA_1 y BB_1. Demuestra que se cumple $|A_1C| \cdot |BC| = |B_1C| \cdot |AC|$.

Solución. El triangulo AA_1C es semejante al triangulo BB_1C.

□

Problema 18. ¿Existe un trapecio, que no sea un cuadrado, en el que cada diagonal lo divide en dos triángulos isósceles?

Solución. Todas las condiciones del problema se satisfacen con un trapecio isósceles de base menor igual al lado lateral, y ángulos de 72° con base mayor.



En efecto, empezamos dibujando el lado AD de longitud cualquiera, y el punto C tal que $\angle ADC = 72°$ y $|AC| = |AD|$ (es decir, ADC es un triángulo isósceles con $|AC| = |AD|$ y los dos ángulos iguales miden 72°). Tenemos que $\angle CAD = 180° - 72° - 72° = 36°$. Dibujamos el punto B al otro lado de AC que el punto D tal que $\angle CAB = 36° = \angle ACB$. Entonces el triángulo ABC es isósceles.

Veamos que el cuadrilátero $ABCD$ construido según la descripción del párrafo anterior es un trapecio isósceles. En efecto, BC es paralelo a AD porque forman el mismo ángulo con AC (36°), y además

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 36° + 36° = 72° = \angle ADC$$

Sea M el pie de la perpendicular a AD que sale de B, y N el pie de la perpendicular a AD que sale de C. Los triángulos ABM y DCN tienen dos ángulos en común ($\angle A = \angle D$ y $\angle M = \angle N$), por lo que son semejantes. Como BC y AD son paralelas, tenemos que $|BM| = |CN|$, por lo que el coeficiente de semejanza entre los triángulos ABM y DCN es 1, es decir, son congruentes. En particular, $|AB| = |DC|$. Por tanto, $ABCD$ es un trapecio isósceles en el que $|AB| = |BC| = |CD|$.

Por construcción del cuadrilátero $ABCD$, los triángulos ABC y ADC son isósceles. Como hemos demostrado que $ABCD$ es un trapecio isósceles, el triángulo DBA es congruente a ADC, y por tanto es isósceles, y el triángulo BCD es congruente a ABC, por lo que es isósceles también. Así, queda demostrado que el cuadrilátero $ABCD$ construido según las instrucciones de hace dos párrafos es una solución al problema dado. □

Problema 19. En un triángulo isósceles ABC, las alturas AD y CE, bajadas a los lados, forman un ángulo AMC igual a 48°. Halla los ángulos del triángulo ABC. (No te estamos diciendo cuáles de los lados de ABC son iguales)

Solución. Como el ángulo AMC más el ángulo ABC es $180°$, entonces $\angle ABC = 180° - 48° = 132°$. Entonces $\angle BAC = \angle BCA = \frac{180°-132°}{2} = 24°$. $\square$

Problema 20. ¿Pueden existir 5 puntos en el plano, no todos ellos alineados, tales que la distancia entre cualquiera dos de ellos es un número entero en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$?

Solución. Sí. Por ejemplo, los puntos $(0, 0)$, $(\pm 3, 0)$ y $(0, \pm 4)$. Las distancias entre cualquier par de ellos pueden ser $3, 4, 5, 6, 8$.

$\square$

Problema 21. Un trapecio tiene una altura (distancia entre los dos lados paralelos) de 12 cm y sus diagonales miden 13 y 15 cm respectivamente. Determina todas las áreas posibles de este trapecio.

Solución. Podemos situar el trapecio $ABCD$ en el plano de manera que $A = (a, 12)$, $B = (b, 12)$, $C = (c, 0)$ y $D = (d, 0)$. Los vértices están enumerados en sentido horario, por lo que $b > a$ y $c > d$ Podemos asumir que la diagonal larga es AC, por lo que $c > a$. Entonces, el teorema de Pitágoras nos dice que $(c - a)^2 + 12^2 = 15^2$ y que $(d - b)^2 + 12^2 = 13^2$, por lo que $c - a = 9$ y $|d - b| = 5$.

El área del trapecio es $\frac{((c-d)+(b-a))\cdot 12}{2} = 6 \cdot (c - a) + 6 \cdot (b - d) = 6 \cdot (9 \pm 5)$, y esto puede ser 84 cm^2 o 24 cm^2, según el signo. Las dos son posibles:

- Ejemplo con área 84 cm^2: $A = (0, 12)$, $B = (5, 12)$, $C = (9, 0)$, $D = (0, 0)$.
- Ejemplo con área 24 cm^2: $A = (0, 12)$, $B = (1, 12)$, $C = (9, 0)$, $D = (6, 0)$.

$\square$