PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
2023–24

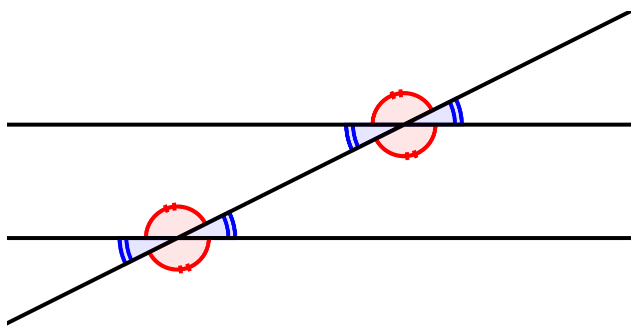
Fecha: 17 y 24 de noviembre, 1 de diciembre de 2023. **Hoja 3 - Marte y Neptuno**

Ángulos, triángulos y semejanza

Vamos a enunciar algunos resultados y ejemplos de geometría que pueden ser útiles para la resolución de los problemas. Después de cada ejemplo hay uno o varios problemas para que practiquéis unos resultados concretos. **Lee la hoja, y empieza resolviendo los ejercicios del 1 al 10 en orden**. A partir del ejercicio 11, puedes resolverlos en el orden que quieras. **También recomendamos traer una regla y compás para realizar los dibujos.**

Como en todas las hojas, el objetivo es que aprendáis a justificar por qué vuestros argumentos son correctos, no en llegar a la solución correcta sin preocuparnos del proceso. En geometría, a veces podemos tener la tentación de ver un dibujo y sacar conclusiones de él del tipo “este ángulo es recto” o “estos dos triángulos son iguales”. Sin embargo, **los dibujos están sólo para darnos intuición, pero no son una demostración**, ya que siempre hay errores de redondeo si medimos algo con una regla o con un transportador de ángulos. **Tenéis que poder justificar por qué todos los pasos que hagáis son ciertos a partir de los teoremas que enunciamos en esta hoja**. Vuestros profesores estarán encantados de ayudaros a formalizar estos argumentos, pero **no vale decir “esto no lo sé hacer” sin haberlo intentado**.

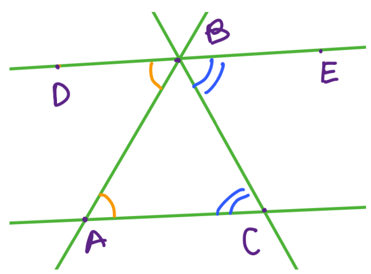
Teorema 1 (Ángulos cortados por rectas paralelas)**.** *Si una recta r corta a dos rectas paralelas s y s', los ángulos que se forman son iguales.*



Omitimos la demostración de este teorema, pero veamos una de sus consecuencias.

Ejemplo resuelto. Demuestra que los ángulos de un triángulo suman 180°.

Solución. Sea ABC un triángulo. Tracemos una recta paralela a la recta AC que pasa por el punto B. Sean D y E dos puntos en en recta a ambos lados de B.



Entonces, el Teorema 1 nos dice que $\angle BAC = \angle ABD$ y $\angle ACB = \angle CBE$. Por lo tanto

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°,$$

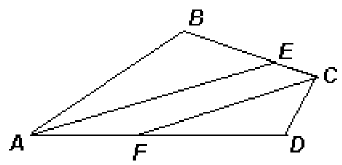
donde la última igualdad es cierta porque D, B y E están alineados. $\square$

En el ejemplo anterior, hemos deducido la solución a partir del Teorema 1. Para el siguiente ejercicio puedes usar tanto el Teorema 1 como el resultado del ejemplo anterior. En general, **para justificar los ejercicios de esta hoja puedes usar los teoremas enunciados en esta hoja y los resultados de otros ejercicios de la hoja que ya hayas resuelto**.

Problema 1. Demuestra que los ángulos de un cuadrilátero suman 360°.

Problema 2. Demuestra que dos ángulos contiguos de un paralelogramo suman 180°.

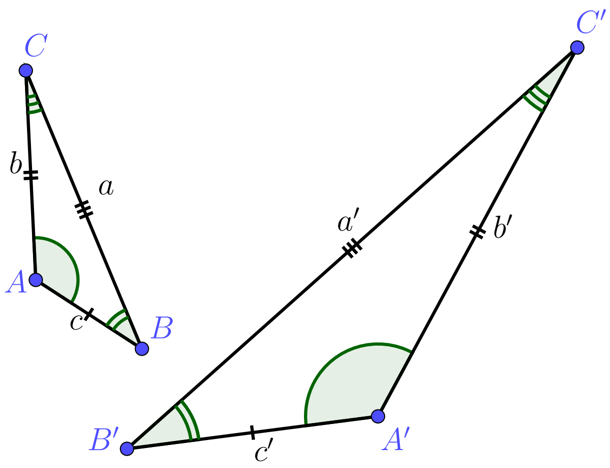
Problema 3. En el cuadrilátero $ABCD$, las bisectrices AE y CF de los ángulos A y C son paralelas (ver figura). Demuestra que los ángulos B y D son iguales[1].



Definición. Decimos que dos triángulos son **semejantes** si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. Es decir, dos triángulos son semejantes si existe una forma de etiquetar sus vértices como ABC y $A'B'C'$ de manera que

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

y que $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\quad \angle CAB = \angle C'A'B' \quad$ y $\quad \angle BCA = \angle B'C'A'$.



El valor $k = \dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$ se llama el **coeficiente de semejanza**.

Definición. Decimos que dos triángulos son **congruentes** si tienen la misma forma (ángulos correspondientes iguales) y el mismo tamaño (lados correspondientes iguales). En otras palabras, dos triángulos son congruentes si son semejantes y su coeficiente de semejanza es $k = 1$.

[1]El argumento que des tiene que valer para todo cuadrilátero $ABCD$ en el que las bisectrices AE y CF de los ángulos A y C son paralelas, no sólo para el cuadrilátero del dibujo.

El siguiente teorema nos dice que es necesario conocer sólo una parte de las condiciones que determinan la semejanza de triángulos.

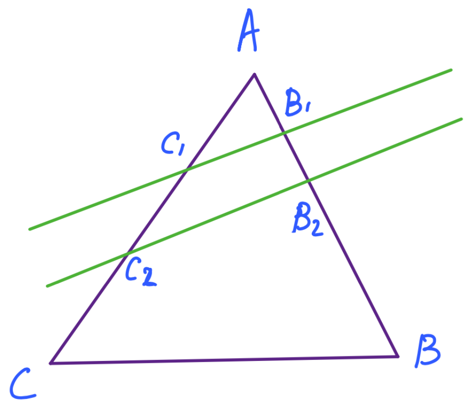
Teorema 2 (Semejanza de triángulos)**.** *Si tenemos dos triángulos ABC y $A'B'C'$, y se cumple una* (**cualquiera**) *de estas tres condiciones, entonces son semejantes:*

- $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|CA|}{|C'A'|}$.
- $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.
- $\angle CAB = \angle C'A'B'$ *y* $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Problema 4. Explica en tus propias palabras lo que significan cada una de las tres condiciones del Teorema 2.

Problema 5. Encuentra dos triángulos tales que dos de los lados del primero son iguales a dos de los lados del segundo, que además tienen un ángulo igual, pero que no son congruentes. Compara esto con la segunda condición del Teorema 2.

Problema 6. Demuestra que si dos rectas paralelas cortan el ángulo con el vértice A formando los triángulos AB_1C_1 y AB_2C_2, entonces estos triángulos son semejantes y $\frac{|AB_1|}{|AB_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}$ (los puntos B_1 y B_2 están en un lado del ángulo, C_1 y C_2 están en el otro).



Problema 7. Tenemos dos cuadriláteros, $ABCD$ y $A'B'C'D'$. Decimos que son congruentes si todos sus lados y ángulos correspondientes son iguales ($|AB| = |A'B'|$, $\angle ABC = \angle A'B'C' \ldots$). Demuestra[2]:

- Si los lados correspondientes son iguales, no tienen por qué ser congruentes.
- Si los lados correspondientes son iguales y además $|AC| = |A'C'|$, entonces tampoco tienen por qué ser congruentes.
- (Más difícil) Si los lados correspondientes son iguales y además un par de ángulos correspondientes son iguales, entonces sí tienen que ser congruentes.

¿Por qué las torres del tendido eléctrico y la torre Eiffel están hechas de triángulos y no cuadriláteros?

Problema 8. Sea ABC un triángulo, sea M el punto medio del segmento AB y sea N el punto medio del segmento AC. Demuestra que el segmento MN es paralelo al segmento BC y que $|BC| = 2|MN|$.

Problema 9. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes y sea k su coeficiente de semejanza, es decir,

$$k = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

[2]Para demostrar que un enunciado no siempre es cierto basta encontrar un ejemplo en el que no lo es.

a) Sea D el pie de la altura del triángulo ABC que sale del vértice B, y sea D' el pie de la altura del triángulo $A'B'C'$ que sale del vértice B'. Demuestra que

$$\frac{|BD|}{|B'D'|} = k.$$

b) Demuestra que

$$\frac{\text{Área}_{ABC}}{\text{Área}_{A'B'C'}} = k^2.$$

Problema 10. A través de los puntos M y N, que dividen el lado AB del triángulo ABC en tres partes iguales, se han trazado líneas paralelas al lado AC. Encuentra el área de la parte del triángulo comprendida entre estas líneas, si el área del triángulo ABC es igual a 1.

La construcción con regla y compás es el trazado de puntos, segmentos de recta y ángulos **usando exclusivamente una regla y compás (sin escuadra, cartabón, ni transportador de ángulos)**. Todas las construcciones con regla y compás son aplicaciones sucesivas de dos construcciones básicas:

1. Dados dos puntos A y B, crear la recta que une estos dos puntos.

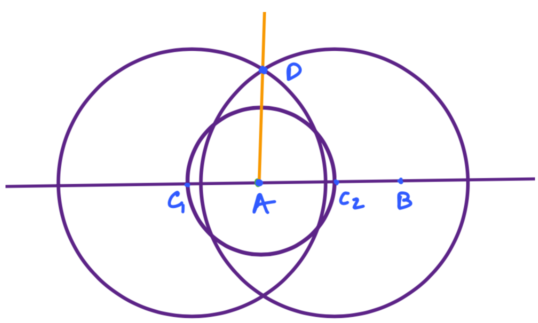
2. Dados tres puntos A, B y C, crear la circunferencia con centro en A y radio $|BC|$.

Con estas construcciones obtenemos puntos nuevos como puntos de intersección de rectas y circunferencias construidas.

Mientras lees la solución al siguiente ejemplo resuelto, reproduce lo que dice en tu cuaderno usando regla y compás, para acostumbrarte.

Ejemplo resuelto. Dados dos puntos A y B distintos, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto A.

Solución. El procedimiento es el siguiente:



1. Trazamos una circunferencia con el centro A que interseca AB en los puntos C_1 y C_2 (en particular, $|AC_1| = |AC_2|$).

2. Escogemos un radio $r > |AC_1|$ y trazamos dos circunferencias de radio r con centros C_1 y C_2. Sea D el punto de intersección (en particular, $|DC_1| = |DC_2|$).

3. La recta AD es perpendicular a AB.

Para ver que la construcción es correcta, observemos que los triángulos AC_1D y AC_2D son congruentes ya que tienen los lados correspondientes iguales ($|AC_1| = |AC_2|$ ya lo sabíamos, al igual que $|DC_1| = |DC_2|$, y el lado AD es común a ambos triángulos). Entonces $\angle DAC_1 = \angle DAC_2$. Además, $\angle DAC_1 + \angle DAC_2 = 180°$, por lo que

$$\angle DAC_1 = \angle DAC_2 = 90°.$$

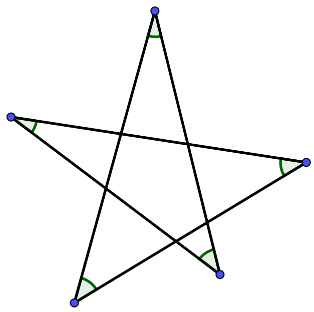
□

Asegúrate de haber entendido el ejemplo resuelto anterior antes de intentar el siguiente problema.

Problema 11. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto C.

Problema 12. Dados tres puntos A, B y C que no están en una misma recta, construir usando regla y compás, la recta paralela a la recta AB y que pasa por el punto C.

Problema 13. Encuentra la suma de los ángulos de las puntas de una estrella de 5 puntas.



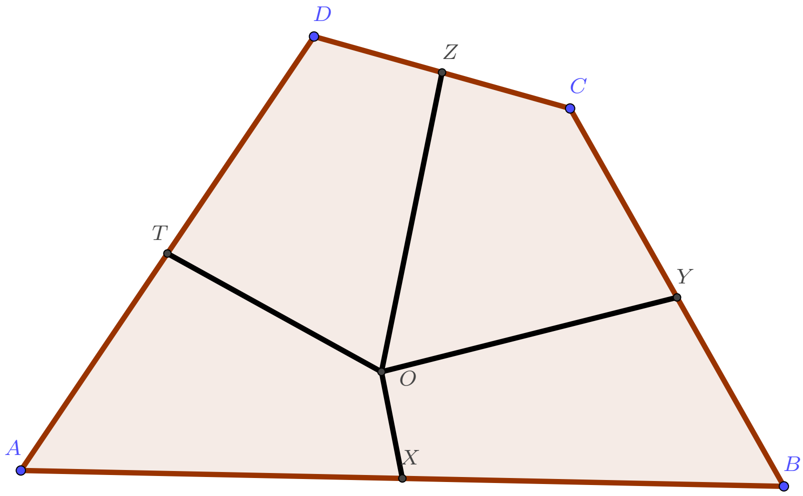
Problema 14. Demuestra que el hexágono regular de lado s está inscrito[3] en una circunferencia de radio s. Usa esto para describir cómo, a partir de una longitud s dada, podemos construir con regla y compás un hexágono regular de lado s.

Problema 15. Una cuadrícula está formada por cuadrados de lado 1. Dibujamos un polígono en la cuadrícula cuyos lados están en líneas de la cuadrícula. Determina todos los posibles perímetros que se pueden obtener con este tipo de polígonos.

Problema 16. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo cualquiera, y sea O un punto de su interior. Si unimos O con las cuatro puntos medios de los lados X, Y, Z y T se forman cuatro cuadriláteros, $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ y $OTAX$.

Demostrar que la suma de las áreas de los cuadriláteros $OTAX$ y $OYCZ$ es la misma que la suma de las áreas de los cuadriláteros $OXBY$ y $OZDT$.

[3]Un polígono está inscrito en una circunferencia si todos sus vértices están en la circunferencia.



Problema 17. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AA_1 y BB_1. Demuestra que se cumple $|A_1C| \cdot |BC| = |B_1C| \cdot |AC|$.

Problema 18. ¿Existe un trapecio, que no sea un cuadrado, en el que cada diagonal lo divide en dos triángulos isósceles?

Problema 19. En un triángulo isósceles ABC, las alturas AD y CE, bajadas a los lados, forman un ángulo AMC igual a $48°$. Halla los ángulos del triángulo ABC. (No te estamos diciendo cuáles de los lados de ABC son iguales)

Problema 20. ¿Pueden existir 5 puntos en el plano, no todos ellos alineados, tales que la distancia entre cualquiera dos de ellos es un número entero en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$?

Problema 21. Un trapecio tiene una altura (distancia entre los dos lados paralelos) de 12 cm y sus diagonales miden 13 y 15 cm respectivamente. Determina todas las áreas posibles de este trapecio.