PIM Pequeño Instituto de Matemáticas 2023-24

Fecha: 15, 22 y 29 de septiembre, 6 de octubre de 2023.

¿Qué es una demostración? El método de reducción al absurdo.

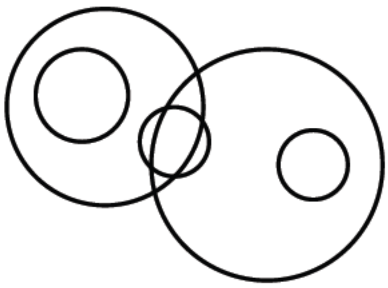
Una **demostración** matemática no es más que un argumento lógico bien explicado. Veamos un ejemplo.

Ejemplo resuelto. En un congreso de las sociedades matemáticas españolas y francesas no había representantes de otros países. La suma total de dinero de los franceses resultó ser mayor que la suma total de dinero de los españoles, y la suma total de dinero de las mujeres resultó ser mayor que la suma total de dinero de los hombres. Demuestra que en el congreso participó por lo menos una matemática francesa.

Solución. Si en la reunión no hubiera francesas, es decir, todas las mujeres eran españolas, entonces la cantidad total de dinero entre las españolas sería mayor que la de todos los hombres. Por lo tanto, las españolas tendrían más dinero que los franceses. Pero esto entra en contradicción con la premisa de que la cantidad total de dinero entre los franceses es mayor que la cantidad total de dinero entre los españoles (hombres y mujeres juntos). Esta contradicción solo se explica porque nuestra suposición que no hubiera mujeres francesas en el congreso era incorrecta. Entonces hay francesas en el congreso y el ejercicio queda probado. □

Intenta resolver este ejercicio.

Problema 1. El guarda forestal contó los pinos en el bosque. Dio cinco vueltas alrededor de los círculos mostrados en el dibujo y encontró exactamente 3 pinos dentro de cada círculo.



Demuestra que el guarda forestal se equivocó.

Solución. Supongamos que el guardabosques tiene razón. Observemos los círculos pequeños izquierdo y derecho. En cada uno de ellos, el guardabosques contó tres pinos. Esto significa que no debería haber otros pinos en los círculos grandes. Pero entonces, en el círculo central pequeño no debería haber ni un solo pino en absoluto. Es un contradicción. Por lo tanto el guarda forestal se equivocó. □

Ejemplo resuelto. De un juego de dominó, se retiran todas las fichas con seises. ¿Se puede colocar las fichas restantes en una fila?

Solución. Supongamos que lo logramos. Ahora el cinco se encuentra 7 veces. Dentro de la cadena, ocurre un número par de veces. Entonces, en un extremo, debe estar un cinco. De manera similar, se puede probar que todos los demás números de las fichas de dominó están en los extremos. Pero hay seis números y sólo dos extremos. Contradicción. Así que nuestra suposición es incorrecta. Por lo tanto, no se puede colocar las fichas restantes en una fila. □

Problema 2. ¿Es posible distribuir 44 bolas en 9 montones de modo que el número de bolas en diferentes montones sea diferente?

Solución. Supongamos que lo podemos hacer. Ordenamos los montones de 1 a 9 según el número de bolas (el primer montón es más pequeño y el noveno es más grande). Entonces en el primer montón hay por lo menos una bola, en el segunodo 2, ..., en el noveno 9. Por lo tanto hay por lo menos

$$1 + 2 + \ldots + 9 = 45$$

bolas en total. Es una contradicción, ya que sólo hay 44 bolas. □

Problema 3. En las casillas de un tablero de ajedrez, se han colocado todos los números naturales del 1 al 64 de alguna manera. Demuestra que siempre habrá dos casillas adyacentes, ya sea en el lado o en la esquina, cuyos números difieren en al menos 9.

Solución. Supongamos lo contrario: la diferencia entre los números en cualquier par de casillas adyacentes, ya sea en el lado o en la esquina, no supera 8. Observemos que la distancia entre cualquier par de casillas no excede los siete movimientos de un rey en ajedrez. Por lo tanto, según nuestra suposición, la diferencia entre los números en cualquier par de casillas no supera $7 \cdot 8 = 56$. Pero la diferencia entre 64 y 1 es $63 > 56$. Esta contradicción demuestra que la suposición es incorrecta y que siempre habrá dos números en casillas adyacentes cuya diferencia es al menos 9. □

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo resuelto. Demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional[1].

Solución. El número $\sqrt{2}$ es un número real, así que o es racional o es irracional. $\sqrt{2}$ es un número positivo, así que si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, entonces podríamos expresarlo como una fracción irreducible de esta manera:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números enteros positivos y m.c.d.}(a, b) = 1.$$

Si esto último fuese verdad, podríamos elevar la igualdad enterior al cuadrado y multiplicar ambos lados por b^2 para obtener que

$$\text{existen dos números enteros positivos } a \text{ y } b \text{ tales que m.c.d.}(a, b) = 1 \text{ y tales que } 2b^2 = a^2. \tag{1}$$

Ahora vemos que $2b^2 = a^2$ implica que 2 es un divisor de a^2. Si consideramos la descomposición en factores primos de a^2 nos damos cuenta de que esto sólo es posible si 2 es un divisor de a. Por tanto, podemos expresar a como $a = 2a'$, donce a' es un número entero positivo. Sustituimos el valor de a en la expresión $2b^2 = a^2$ y obtenemos que $2b^2 = 4(a')^2$, que implica que

$$2(a')^2 = b^2, \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números enteros positivos.}$$

Argumentando de manera análoga al párrafo anterior deducimos que 2 es un divisor de b^2, por lo que es un divisor de b.

Hemos demostrado que si $\sqrt{2}$ fuese racional, entonces lo expresado en (1) sería cierto (en particular m.c.d.$(a, b) = 1$), y que 2 es un divisor tanto de a como de b. Es decir, hemos demostrado que si $\sqrt{2}$ fuera racional entonces ocurriría algo imposible. Por tanto, $\sqrt{2}$ tiene que ser irracional. □

Este ejemplo que acabamos de ver es una **demostración por reducción al absurdo**. Las demostraciones por reducción al absurdo siguen siempre la siguiente estructura:

- Nos piden demostrar un enunciado P (en el ejemplo anterior, $P =$“$\sqrt{2}$ es irracional”).

[1]Los números racionales son aquellos que pueden ser expresados como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$. Los números irracionales son los números reales que no son racionales.

- Asumimos que el enunciado P es falso (en el ejemplo anterior sería asumir que $\sqrt{2}$ no es irracional, o lo que es lo mismo, que $\sqrt{2}$ es racional).
- A partir de la hipotesis de que P es falso, deducimos lógicamente una contradicción/un absurdo (en el ejemplo anterior la contradicción ha sido que 2 sea un factor común de a y b a la vez que m.c.d.$(a, b) = 1$).
- Como las contradicciones son hechos imposibles, deducimos que nos hemos tenido que equivocar en asumir que P es falso, por lo que P tiene que ser cierto.

Realiza este ejercicio para practicar este tipo de demostración.

Problema 4. Demuestra que $\sqrt[3]{9}$ y $\sqrt[4]{80}$ son irracionales.

Solución.

- Supongamos que $\sqrt[3]{9}$ es racional. Entonces,

  existen dos números enteros positivos a y b tales que m.c.d.$(a, b) = 1$ y tales que $\sqrt[3]{9} = \dfrac{a}{b}$.

  Elevando ambos lados de la igualdad al cubo y multiplicando por b^3, obtenemos que

  existen dos números enteros positivos a y b tales que m.c.d.$(a, b) = 1$ y tales que $3^2b^3 = a^3$.

  De la última igualdad deducimos que 3 es un factor primo de a^3, por lo que es un factor primo de a. Sea a' el entero positivo tal que $a = 3a'$. Sustituyendo, obtenemos que $3^2b^3 = 3^3(a')^3$, es decir, $b^3 = 3(a')^3$. De aquí deducimos que 3 es un factor primo de b.

  Asumiendo que $\sqrt[3]{9}$ es racional, hemos deducido que existen a y b números enteros positivos tales que m.c.d.$(a, b) = 1$ y que son ambos divisibles por 3, y esto es absurdo. Por tanto, $\sqrt[3]{9}$ es irracional.

- Supongamos que $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5}$ es racional. Entonces,

  existen dos números enteros positivos a y b tales que m.c.d.$(a, b) = 1$ y tales que $\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \dfrac{a}{b}$.

  Elevando ambos lados de la igualdad a la cuarta y multiplicando por b^4, obtenemos que

  existen dos números enteros positivos a y b tales que m.c.d.$(a, b) = 1$ y tales que $2^4 \cdot 5 \cdot b^4 = a^4$.

  De la última igualdad deducimos que 5 es un factor primo de a^4, por lo que es un factor primo de a. Sea a' el entero positivo tal que $a = 5a'$. Sustituyendo, obtenemos que $2^4 \cdot 5 \cdot b^4 = 5^4(a')^4$, es decir, $2^4b^3 = 5^3(a')^4$. De aquí deducimos que 5 es un factor primo de b.

  Asumiendo que $\sqrt[4]{80}$ es racional, hemos deducido que existen a y b números enteros positivos tales que m.c.d.$(a, b) = 1$ y que son ambos divisibles por 5, y esto es absurdo. Por tanto, $\sqrt[4]{80}$ es irracional.

$\square$

Veamos ahora otro ejemplo.

Ejemplo resuelto. Existen infinitos números primos[2].

[2] Los números primos son aquellos enteros positivos que tienen exactamente dos divisores enteros positivos, el 1 y ellos mismos. En particular, el 1 NO es primo, porque sólo tiene un divisor entero positivo.

Solución. Argumentamos por reducción al absurdo. Supongamos que sólo existen un número finito de números primos $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$. Consideramos el número $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, que es un número entero positivo estrictamente mayor que 1, y por tanto tiene que ser divisible por algún número primo. Sea p_i un primo tal que N es divisible por p_i.

Como p_i es un divisor de $p_1 p_2 \cdots p_n$ y también de N, entonces p_i es un divisor de $1 = N - p_1 p_2 \cdots p_n$, es decir, $p_i = 1$. Esto es imposible porque 1 no es un número primo. Hemos llegado a una contradicción que viene de asumir que hay un número finito de números primos, por lo que queda demostrado que hay infinitos primos. □

Intenta resolver estos dos ejercicios usando el método de reducción al absurdo.

Problema 5. Demuestra que existen infinitos primos de la forma $3k + 2$.
Ayuda: Empieza pensando por qué todo número entero puede ser escrito de la forma $3k$, $3k + 1$, o $3k + 2$ para algún entero k, y sólo de una de ellas. ¿De cuáles de estos tipos pueden ser los números primos? Luego, argumenta por reducción al absurdo asumiendo que sólo hay un número finito de primos de la forma $3k + 2$, llámalos $p_1 = 2, p_2 = 5, \ldots, p_n$, y considera el número $N = 3p_1 p_2 \cdots p_n - 1$.

Solución. Todo número entero dividido por 3 da resto 0, 1 o 2, lo que es equivalente a que puede ser escrito de la forma $3k$, $3k + 1$, o $3k + 2$ para algún entero k. El único primo de la forma $3k$ es 3, y en principio puede haber muchos primos de las otras dos formas $(7, 13, 19, 31$ son de la forma $3k + 1$; 2, 5, 11, 17, 23 son de la forma $3k + 2)$.

Supongamos que sólo hay un número finito de primos de la forma $3k + 2$, y los llamamos $p_1 = 2, p_2 = 5, \ldots, p_n$ (ordenados de menor a mayor). Sea $N = 3p_1 p_2 \cdots p_n - 1$. Tenemos que $N = 3(p_1 p_2 \cdots p_n - 1) + 2$, por lo que N es de la forma $3k + 2$ (es decir, el resto de dividir N por 3 es 2). También tenemos que $N > 1$, y N tiene una descomposición en producto de primos.

Como $(3k_1 + 1) \cdot (3k_2 + 1) = 3(3k_1 k_2 + k_1 + k_2) + 1$, concluimos que el producto de dos enteros de la forma $3k + 1$ es de la forma $3k + 1$. En particular, el producto de uno, dos o más números primos de la forma $3k + 1$ no puede ser N, que es de la forma $3k + 2$. Por tanto N tiene que tener un factor primo q que es o 3 o de la forma $3k + 2$.

Como q es 3 o de la forma $3k + 2$, tenemos que q divide a $1 = 3p_1 p_2 \cdots p_n - N$, por lo que $q = 1$, que es imposible. La contradicción viene de asumir que hay un número finito de primos de la forma $3k + 2$. Por tanto, existen infinitos primos de la forma $3k + 2$. □

Problema 6. Una clase tiene 23 alumnos, y el peso de cada uno de ellos es un número entero de kilos. Los 23 alumnos van a jugar un partido de fútbol, para lo que elegirán un árbitro y el resto se dividirán en dos equipos de 11. Nos dicen que, sea quien sea el árbitro elegido, siempre será posible elegir dos equipos que pesen lo mismo, siendo el peso de un equipo la suma de los pesos de todos sus integrantes. Demuestra que los 23 alumnos pesan todos lo mismo.

Solución. Supongamos que no todos los 23 alumnos pesan lo mismo. Sean $n_1, n_2, \ldots, n_{23}$ los pesos de los 23 alumnos, ordenados de mayor a menor. Sea $N = n_1 + \ldots + n_{23}$ la suma de todos ellos. Como asumimos que no todos pesan lo mismo, tenemos que $n_{23} - n_1 > 0$.

Como sea quien sea el árbitro se pueden hacer dos equipos del mismo peso, tenemos que $N - n_i$ es un número par para todo $i = 1, 2, \ldots, 23$, por lo que n_i es par si N es par y n_i es impar si N es impar. En cualquier caso, todos los n_i tienen la misma paridad. En particular, si el máximo común divisor de todos ellos es 1, entonces tienen que ser todos impares.

Sea $m_i = n_i - n_1$ para todo $i = 1, \ldots, 23$. La colección $\{m_1 = 0, m_2, \ldots, m_{23}\}$ de 23 pesos que también cumplen que, quitado uno cualquiera, el resto se pueden dividir en dos grupos de 11 pesos de igual suma.

Sea d el máximo común divisor de todos los m_i distintos de 0, que existe porque $m_{23} = n_{23} - n_1 > 0$. Si llamamos m'_i a $\frac{m_i}{d}$, obtenemos la colección $\{m'_1 = 0, m'_2, \ldots, m'_{23}\}$ de 23 pesos que también cumplen que, quitado uno cualquiera, el resto se pueden dividir en dos grupos de 11 pesos de igual suma, y además, el máximo común divisor de todos ellos es 1. Por el argumento de hace dos párrafos sabemos que todos los m'_i son impares, pero eso contradice que $m'_1 = 0$. La contradicción viene de asumir que no todos los alumnos pesan lo mismo, por lo que necesariamente todos los alumnos pesan lo mismo. □

¿Cómo podemos aprender a hacer demostraciones?

En matemáticas, las demostraciones no tienen que seguir un formato determinado. El método de reducción al absurdo es sólo una herramienta que puede ser útil para algunos problemas. Esta hoja contiene problemas de temas variados, y la estrategia de reducción al absurdo no tiene por qué funcionar o ser la mejor para muchos de ellos.

Un argumento no será lo suficientemente bueno como para ser considerado una demostración si no supera el *test de los compañeros del grupo*, para lo que todos los alumnos de PIM tenéis que poner de vuestra parte. Con estas pautas en mente, todos aprenderéis a hacer demostraciones:

Test de los compañeros del grupo

- Cuando un miembro del grupo nos cuente su argumento, le pediremos que nos explique todos los pasos que no nos queden claros.
- Tendremos cuidado con las afirmaciones del tipo "esto es obvio". Si algo es realmente obvio, tenemos que ser capaces de explicar por qué lo es.
- Cuando oigamos una afirmación ambigua o poco precisa, pediremos una aclaración.
- Si perdemos el hilo de la argumentación pediremos ayuda hasta que nos quede claro qué pasos se siguen de otros y en qué orden.
- Cuando en la demostración haya que considerar varios casos por separado, nos aseguraremos de haberlos considerado todos al final.
- Al escribir una demostración, lo que queremos demostrar tiene que ser la conclusión, nunca el punto de partida de nuestro argumento. ¡Mucho cuidado con los razonamientos hacia atrás!

Al poner en práctica estas pautas, ten en cuenta que todos cometemos errores argumentando de vez en cuando, y más con problemas complicados como los del PIM. Si encontramos un error en el argumento de otra persona, se lo comunicaremos sin faltar al respeto. Intentaremos siempre poner en valor las contribuciones de nuestros compañeros para que todo el mundo se sienta cómodo de compartir sus razonamientos con el grupo y para que entre todos podamos resolver problemas difíciles que necesiten de varios puntos de vista.

Problema 7. Tienes 9 puntos en una circunferencia tal que la distancia entre dos puntos consecutivos es constante, es decir, los puntos están en los vértices de un eneágono regular. Quieres dibujar una estrella de 9 puntas conectando estos puntos por segmentos rectos sin levantar el lápiz del papel, saltándote el mismo número de puntos cada vez. Por ejemplo, si numeramos los vértices del 1 al 9 en el sentido de las agujas del reloj y decidimos saltar 1 vértice cada vez, el 1 estará unido con el 3 (saltándonos el 2), el 3 con el 5, etc. ¿Cuántas estrellas diferentes puedes dibujar de esta manera, si el eneágono regular no cuenta como estrella?

Solución. Si nuestro proceso de saltarnos k vértices da lugar a una estrella de 9 puntas, da igual en qué vértice empecemos. Saltarnos k vértices en el sentido de las agujas del reloj equivale a saltarnos $7-k$ vértices en el sentido contrario a las agujas del reloj. Si saltar k vértices en el sentido de las agujas del reloj nos da lugar a una estrella, esta es la misma que obtenemos al saltar k vértices en el sentido contratio a las agujas del reloj. Por tanto, podemos asumir que recorremos los vértices en el sentido de las agujas del reloj, empezando por el vértice 1, y que saltamos k vértices, con $k = 0, 1, 2, 3$.

- Saltarse 0 vértices nos da el eneágono regular, que no cuenta como estrella.
- Saltarse 1 vértice da $1-3-5-7-9-2-4-6-8-1$.

- Saltarse 2 vértices da $1 - 4 - 7 - 1$, que no es una estrella de 9 puntas.
- Saltarse 3 vértices da $1 - 5 - 9 - 4 - 8 - 3 - 7 - 2 - 6 - 1$.

Por tanto, hay dos estrellas distintas.

□

Problema 8. Encuentra todas las ternas de enteros positivos (a, b, c) tales que $a^2 + b^2 = 4c + 3$.

Solución. No hay ninguna terna de enteros que satisfaga las condiciones del enunciado. $4c + 3$ es impar para todo entero c, así que si (a, b, c) es una solución, a y b no pueden ser los dos impares o los dos pares.

Si a y b es uno par y otro impar, entonces $a^2 + b^2 = (2n)^2 + (2m - 1)^2$ para algunos enteros positivos n y m. Por tanto, $a^2 + b^2 = 4(n^2 + m^2 - m) + 1 = 4c + 3$, y entonces, $4(n^2 + m^2 - m - c) = 2$. Como $n^2 + m^2 - m - c$ es un entero, esto último es imposible, porque 4 no divide a 2.

□

Problema 9. Un buscador de oro tiene un montón de arena dorada con un peso de 37 kg (y no tiene más arena aparte de eso), una balanza de dos platillos y dos pesas de 1 kg y 2 kg. El buscador de oro puede realizar dos tipos de acciones:

1. **Equilibrar la balanza:** si la balanza no está en equilibrio, puede transferir parte de la arena de un platillo al otro para que la balanza se equilibre.
2. **Añadir hasta el equilibrio:** si la balanza no está en equilibrio, puede agregar arena a uno de los platillos para que la balanza se equilibre.

Por supuesto, solo puede realizar cada una de estas acciones si tiene suficiente arena para hacerlo.

¿Cómo puede el buscador de oro, con dos acciones en la balanza, obtener un montón de arena con exactamente 26 kg? Mezclar los dos montones de arena y simplemente colocar algo en la balanza no se considera una acción.

Solución. El primer movimiento que el buscador de oro puede hacer es colocar toda la arena en el platillo izquierdo de la balanza y colocar ambas pesas en el platillo derecho, y luego transferir arena hasta que se alcance el equilibrio. Como resultado, tendrá 20 kg de arena en el lado izquierdo y 17 kg de arena (y dos pesas de 1 kg y 2 kg) en el lado derecho.

El segundo movimiento consiste en colocar 20 kg de arena en el platillo izquierdo de la balanza y colocar una pesa de 2 kg en el platillo derecho, y nuevamente equilibrar la balanza hasta que haya 11 kg de arena en el lado izquierdo y 9 kg de arena (y una pesa de 2 kg) en el lado derecho.

Finalmente, el buscador de oro debe mezclar el montón de 9 kg de arena obtenido en el segundo movimiento con el montón restante de 17 kg de arena obtenido en el primer movimiento.

□

Problema 10. Las hermanas Inés y Carla decidieron hacer un video divertido y subirlo a YouTube. Primero, filmaron sus trayectos desde su casa hasta la escuela: Inés caminó durante 8 minutos y Clara caminó durante 5 minutos. Luego regresaron a casa y se sentaron frente a la computadora para editar el video. Decidieron reproducir simultáneamente el video de Inés desde el principio y el video de Carla desde el final, en dirección opuesta. Pegaron los videos cuando las hermanas estaban en el mismo punto de la calle en ambos vídeos. El resultado fue un video en el cual Inés va de su casa en dirección a la escuela, pero antes de llegar a la escuela de repente se convierte en Carla y regresa a casa, pero andando hacia atrás. ¿Cuál es la duración total del video?

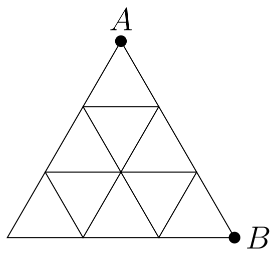
Solución. Ejecutemos el video resultante en un monitor y el video completo de Carla desde el final en el otro. Luego, los monitores mostrarán cosas diferentes hasta que las hermanas estén en el mismo punto del camino y, a partir de ese momento, mostrarán lo mismo. Por lo tanto, la duración de estos dos videos es igual. Es decir, 5 minutos.

□

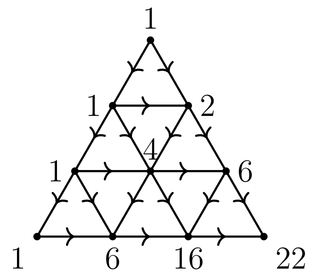
Problema 11. Entre las 40 vasijas con las que el jefe de los bandidos llegó de visita a Alí Babá, se encontraron dos vasijas de diferentes formas y dos vasijas de diferentes colores. Demuestra que entre ellos habrá dos vasijas que sean simultáneamente de diferentes formas y colores.

Solución. Seleccionemos dos vasijas de formas diferentes. Si resulta que también son de colores diferentes, el problema está resuelto. Pero si resulta que son del mismo color, entonces tomaremos cualquier otra vasija que no sea del mismo color que ellas. Esta tercera vasija no coincidirá ni en forma ni en color con alguna de nuestras dos vasijas originales. □

Problema 12. Tenemos un triángulo equilátero dividido en 9 triángulos equiláteros más pequeños como en la figura, siendo el lado de abajo horizontal. Tienes que desplazarte desde el vértice A hasta el vértice B, pero sólo se te permite ir por lados de los triángulos pequeños en las direcciones de abajo a la izquiera, abajo a la derecha, u horizontal a la derecha. Determina el número total de caminos distintos que puedes tomar.



Solución. La respuesta es 22. En cada vértice, el número que aparece es el número de caminos que salen de A y llegan a ese punto siguiendo las reglas del enunciado. También hemos dibujado las direcciones permitidas con flechas.



Para hallar el número que aparece en un vértice concreto $C \neq A$ nos hemos dado cuenta de que ese número es siempre igual a la suma de los números que aparecen en todos los vértices previos a él, donde por "previo" entendemos que D es previo a C si existe una flecha desde D hacia C en el dibujo de arriba. Con esto en mente, y como sólo hay un camino posible de A a A (no moverse), es fácil darse cuenta de que todos los vértices del lado izquierdo del triángulo tienen que tener un 1, y a partir de esos se saca el resto.

□

Problema 13. Ana y Begoña se turnan eligiendo un entero no negativo, y cada vez tienen que hacerlo restando un divisor positivo del último número que haya elegido la otra. La primera que elija el 0 pierde. Por ejemplo, si Ana ha elegido el 2020 en uno de sus turnos, Begoña podría elegir el $2020 - 20 = 2000$, porque 20 es un divisor de 2020. Siguiendo con este ejemplo (ahora Ana tiene que elegir un divisor de 2000 y restárselo), ¿quién de las dos puede asegurarse la victoria si juega de manera óptima, haga lo que haga la otra?

Solución. La respuesta es Ana.

Método 1 (describiendo la estrategia ganadora): Ana puede seguir la siguiente estrategia: Ana elige un divisor impar del número de Begoña (por ejemplo el más grande), y se lo resta. Esto tiene sentido porque 1 divide a todo número entero. Como empezamos de manera que el último número de Begoña es par, Ana siempre elegirá un número impar y Begoña sólo podrá restar divisores impares al número de

Ana, por lo que Begoña siempre elegirá números pares. En cada turno los números elegidos decrecen, por lo que alguna de las dos acabará eligiendo el 0, y esa tendrá que ser Begoña porque el 0 es par.

Método 2 (demostrando que existe una estrategia ganadora para Ana sin describir cuál es la estrategia): Como en cada turno los números elegidos decrecen, el juego siempre acaba y siempre hay una jugadora que puede asegurarse la victoria haga lo que haga la otra. Si Ana se pudiera asegurar la victora eligiendo el $1998 = 2000 - 2$, lo haría. Si no, puede elegir $1999 = 2000 - 1$, y como es primo, en el siguiente turno Begoña sólo podría elegir $1999 - 1999 = 0$ (Begoña pierde) o $1999 - 1 = 1998$ (Begoña no se puede asegurar la victoria). Por tanto, en cualquier caso vemos que Ana tiene estrategia ganadora. □

Problema 14. Un papel cuadriculado de tamaño 8×8 se dobla varias veces a lo largo de las líneas de las celdas para obtener un cuadrado de tamaño 1×1. Después se corta este cuadrado a lo largo de un segmento que conecta los puntos medios de dos lados opuestos del cuadrado. ¿En cuántas partes se divide el cuadrado original?

Solución. Supongamos que el corte es vertical. Dibujemos segmentos verticales en todos los cuadrados de 1×1 en el cuadrado original que conecten los puntos medios de los lados opuestos. Al doblarse a lo largo de las líneas de las celdas, estos segmentos se superponen entre sí. En consecuencia, al cortar, se cortan ellos y sólo ellos. Por lo tantos hay 9 partes.

□

Problema 15. En cada celda de un tablero de 11×11 hay una ficha. Durante un movimiento, se permite quitar cualquier número de fichas consecutivas del tablero (no puede haber espacios entre las fichas que se quitan), ya sea de una fila o de una columna. Juegan dos jugadores y gana el que quita la última ficha. ¿Existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores? ¿Cual es?

Solución. El primer jugador gana. En el primer movimiento el jugador quita la ficha central y luego juega de forma simétrica con respecto del centro del tablero.

□

Problema 16. Dos jugadores escriben un número de $2k$ dígitos usando los números 1, 2, 3, 4, 5. El primer dígito escribe el primer jugador, el segundo dígito el segundo jugador, el tercer dígito otra vez el primer jugador y así sucesivamente. ¿Puede el segundo jugador obtener el número resultante divisible por 9 si el primero quiere evitarlo? (Ayuda: la respuesta puede depender de k).

Solución. Sea $N = a_1 a_2 \ldots a_{2k-1} a_{2k}$ el número dado, donde a_i es uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, y los números con índices impares son elegidos por el primer jugador (A), y los números con índices pares son elegidos por el segundo (B). Denotemos $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$. El número N es divisible por 9 si y solo si S_{2k} es divisible por 9.

Supongamos primero que k es divisible por 3. Probamos que en este caso gana el jugador (B). Para ello, el jugador (B) debe responder a cualquier jugada a_{2i-1} con la jugada $a_{2i} = 6 - a_{2i-1}$. En este caso, $S_{2i} = 6i$ para cualquier $i \leq k$. En particular, $S_{2k} = 6k$ es divisible por 9.

Ahora supongamos que k no es divisible por 3. Demostremos que entonces gana el jugador (A). Para hacer esto, es suficiente que elija $a_1 = 3$, y luego aplique la táctica de (B) en el primer caso, es decir, a cualquier movimiento a_{2i} del jugador (B), responde con el movimiento $a_{2i+1} = 6 - a_{2i}$. En este caso $S_{2k} = 3 + 6(k-1) + a_{2k} = 6k - 3 + a_{2k}$. Si $k = 3n+1$, $S_{2k} = 18n + 3 + a_{2k}$ y si $k = 3n+2$, $S_{2k} = 18(n+1) + a_{2k}$. En ambos casos no es divisible por 9. □

Problema 17. Tenemos 239 monedas aparentemente indistinguibles. Sin embargo dos monedas son falsas y idénticas y el resto de monedas son verdaderas, que se distinguen de las falsas en peso. ¿Cómo saber en tres pesajes en una balanza de plato sin pesas qué moneda es más pesada, una falsa o una verdadera? No hay necesidad de encontrar monedas falsas.

Solución. Dividamos todas las monedas en grupos A, B, C y D de 60, 60, 60 y 59 monedas, respectivamente. Primero comparamos A con B, luego B con C. No puede haber más de dos grupos con monedas falsas. Por lo tanto, los pesos de al menos dos de los grupos son iguales. Por lo tanto, sólo dos resultados son posibles.

1) Los pesos de todos los grupos son iguales. Esto significa que las 180 monedas pesadas son verdaderas. Dejando a un lado cualquier moneda de A y comparando el resto con D, encontramos lo que se requiere.

2) Los pesos de dos grupos son iguales y el peso del tercer grupo es diferente. Consideramos, por ejemplo, el caso $A = B > C$. El resto de casos se analiza igual.

Entonces los grupos A y B tienen cada uno una moneda falsa y son más pesadas que las verdaderas, o en C hay una o dos monedas falsas y son más ligeras que las verdaderas. Dividiendo A en dos montones iguales y comparándolos entre sí, determinamos si hay una moneda falsa allí. Esto determinará en cuál de los dos casos estamos. $\square$

Problema 18. Demuestra que existe una curva de longitud $\sqrt{2\pi S}+1$ que no puede ser cubierta por una figura plana convexa de área S.

Solución. Probemos que tal curva es una semicircunferencia. Una figura convexa que cubre una semicircunferencia debe contener un semicírculo delimitado por esta semicircunferencia, de lo contrario la figura no será convexa. Si tomamos una semicircunferencia de longitud $\sqrt{2\pi S}$, entonces el área del semicírculo correspondiente será S.

En efecto, el área del semicírculo es igual a $\frac{\pi r^2}{2}$ y la longitud de la semicircunferencia es πr .

Así, para cubrir una semicircunferencia mayor se requiere una figura que tenga un área mayor que S.

$\square$

Problema 19. En un país lejano la suma y la resta se denotan con "!" y "?", pero no se sabe qué carácter corresponde a qué operación. Cada operación se aplica a dos números, pero no se sabe sobre la resta si el número de la izquierda se resta del derecho o el derecho del izquierdo. Por ejemplo, la expresión $a?b$ significa uno de los siguientes: $a-b$, $b-a$ o $a+b$. Tampoco se sabe cómo se escriben los números en este país, pero las variables a, b y los corchetes se usan como de costumbre.

Explica cómo usar los signos "!" y "?" para escribir una expresión que en cualquier de los casos será igual a $20a - 18b$.

Solución. Primero, tengamos en cuenta que la expresión $(a?a)!(a?a)$ siempre es cero. A partir de ahora cuando escribimos 0, entendemos que esta expresión aparece en su lugar.

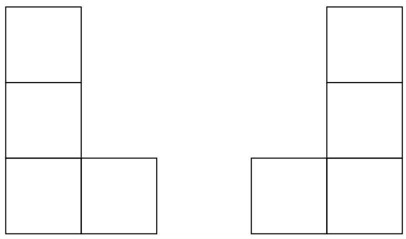
Notemos que la xpresión $(x?0)?(0?y)$ siempre es igual a $x + y$. De manera similar, ahora podemos usar la operación $+$ con dos argumentos.

Finalmente, la expresión $0?((0!(x!0))?0)$ siempre es $-x$.

Ahora es fácil escribir la expresión deseada.

$\square$

Problema 20. Tenemos un tablero $n \times n$ al que le faltan los cuadraditos 1×1 de las cuatro esquinas. El objetivo de este problema es determinar para qué valores de $n \geq 3$ se puede cubrir (sin superponer las piezas) completamente el tablero con piezas de tetris de tipo "L" y "J", es decir, con piezas de estas formas, donde cada cuadradito es de 1×1:



a) Demuestra que si n es impar no podemos cubrir el tablero de esa forma.

b) Demuestra que tampoco podemos hacerlo si n es divisible por 4.

c) Demuestra que si n es un número par no divisible por 4, entonces sí se puede cubrir el tablero de esa forma.

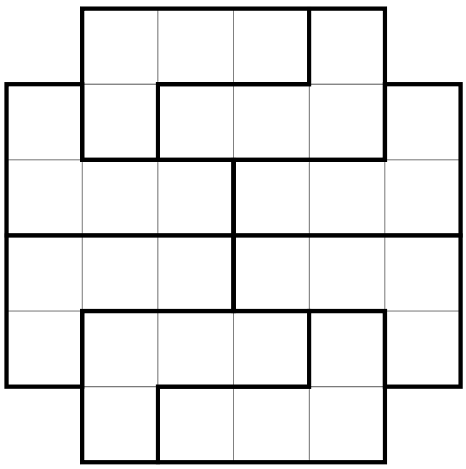
Solución. a) Nuestro tablero al que le faltan las cuatro esquinas tiene $n^2 - 4$ cuadraditos 1×1.

Si n es impar, $n^2 - 4$ es impar, y las piezas que tenemos tienen un número par de cuadraditos. Por tanto, si n es impar, no se puede cubrir el tablero con las piezas que tenemos.

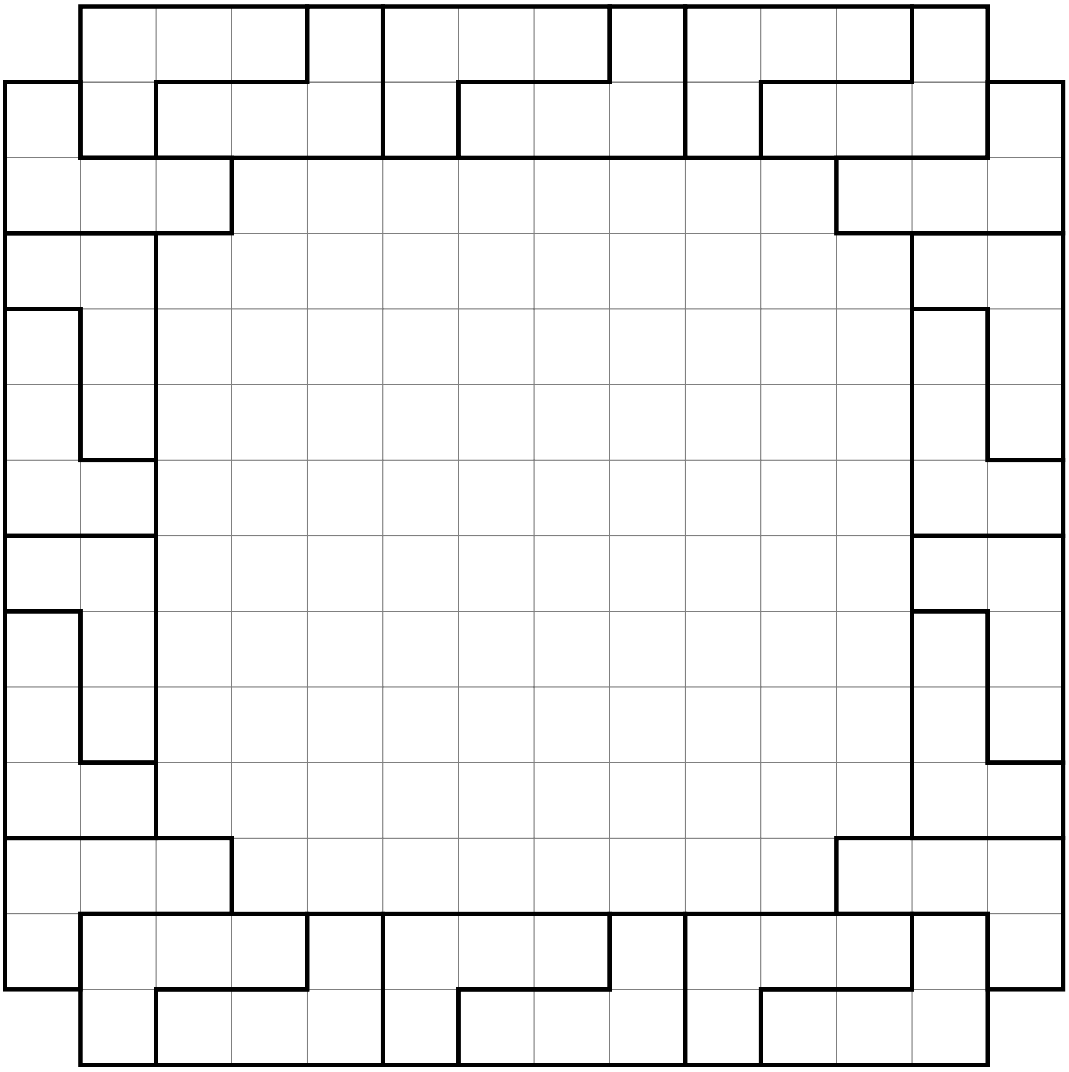
b) Suponemos que $n = 4k$, y que podemos cubrir el tablero de la manera deseada. Coloreamos cada fila de nuestro tablero de un solo color, alternando entre negro y blanco. Con esta coloración hay $\frac{n^2-4}{2} = 8k^2 - 2$ cuadraditos de cada color en nuestro tablero. Cuando pongamos una de esas piezas en el tablero, ocuparán tres cuadraditos de uno de los colores y un cuadradito del otro. Fijamos una manera de cubrir el tablero de la manera deseada, y llamamos a al número de piezas que ocupan tres cuadrados negros en esa forma de cubrir el tablero. Habrá $\frac{n^2-4}{4} - a = 4k^2 - 1 - a$ piezas que ocupen tres cuadrados blancos. Por tanto, el número de cuadrados negros es $3a + (4k^2 - 1 - a) = 2a + 4k^2 - 1$. Este número es impar, y según nuestro argumento, debería ser igual a $8k^2 - 2$, que es un número par. Hemos llegado a una contradicción, y esto nos indica que era imposible cubrir el tablero de la manera deseada.

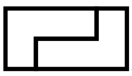
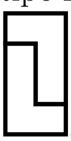
c) Si n es par y no es divisible por 4, entonces es de la forma $4k + 2$, donde $k \geq 1$ (ya que $n \geq 3$ en el enunciado). Hacemos el ejercicio por inducción sobre k.

El caso base corresponde a $k = 1$, y un tablero de esas dimensiones se puede cubrir así:



Para demostrar el paso de inducción, tenemos que ver que si sabemos cubrir el caso k ($n = 4k + 2$), entonces sabremos cubrir el caso $k + 1$ ($n = 4k + 6$). Hacemos el dibujo para $k = 2$ para ilustrar el proceso, pero el argumento es el mismo en todos los casos: La idea es cubrir el borde en el caso $k + 1$ de manera que lo que quede restante equivalga a cubrir el caso k. Cubrimos el borde así:



Vemos que en un tablero correspondiente al caso $k+1$, podemos cubrir el borde de arriba (y también el de abajo) con $k+1$ bloques de tipo , el centro del borde de la izquierda (y también el de la derecha) con k bloques de tipo , y cuatro piezas extra situadas en los extremos de los bordes derecho e izquierdo. Así, en el centro, queda por cubrir un caso análogo al caso k, que sabemos cubrir por la hipótesis de inducción. Esto termina nuestra demostración.

$\square$

Problema 21. Hay dos filas de 100 personas cada una. Cualquier persona que está en la segunda fila es más alta que la que está delante de él. Demuestre que si cada fila se reorganiza en orden según la altura, entonces seguiremos teniendo que cualquier persona que está en la segunda fila es más alta que la que está delante.

Solución. Demostramos el ejercicio en el caso de dos filas de n personas por inducción sobre n. La base de inducción ($n = 1$) es obvia. Ahora supongamos que la afirmación es cierta para $n - 1$ personas en cada fila.

Notemos que ene este problema pueden haber personas de igual altura. En el caso de n personas, sea la persona A una de las más altas en la primera fila, B la persona que está detrás de A, C una persona de las más altas de la segunda fila y D la persona que está delante de C. Por la condición del problema B es más alta que A.

Si B es C (entonces A es D), reorganizamos a las $2(n-1)$ personas restantes y por la inducción obtendremos el resultado.

Supongamos que B no es C, entonces C es por lo menos tan alta como B y por lo tanto es más alta que A. Como B es más alta que A, B es también más alta que D. Por lo tanto si sacamos de las filas a A y C (las personas más altas en cada fila) y ponemos a B en lugar de C, obtendremos 2 filas de $(n-1)$ personas que cumplen la condición que cualquier persona que está en la segunda fila es más alta que la que está delante de él. Ahora aplicamos la inducción y terminamos la demostración.

□

Problema 22. El joyero ha hecho 6 joyas de plata que tienen un aspecto idéntico y pesan 22 g., 23 g., 24 g., 32 g., 34 g. y 36 g. Le ha indicado a su aprendiz que grabara su masa en cada joya. ¿Puede el joyero, en dos pesajes en una balanza de plato sin flechas ni pesas, determinar si el aprendiz no ha confundido las joyas?

Solución. El primer pesaje: en un platillo de la balanza colocamos joyas con grabados de 22 g., 23 g., 24 g. y en el segundo, 34 g. y 36 g. El segundo platillo pesará más solo cuando los grupos de joyas estén correctamente identificados. En este caso, el peso restante tiene una masa de 32 g.

El segundo pesaje: en el primer cuenco ponemos joyas que tiene grabado 24 g. y 32 g., y en el segundo, 22 g. y 34 g. En este caso, en el primer cuenco obtenemos 56 g. (si todo está correcto) o menos (si el ayudante ha cometido un error), y en el segundo cuenco, 56 g. o más. Sólo si estas cuatro joyas están correctamente grabadas en la balanza se establecerá el equilibrio. En este caso, la masa de las pesas restantes es 23 g. y 36 g.

□

Problema 23. Alisa y Juan juegan el siguiente juego. Hay un montón de 100 piedras sobre la mesa. Los chicos se turnan para hacer movimientos y Alisa empieza. Al realizar un movimiento, el jugador divide cada pila que contiene más de una piedra en dos pilas más pequeñas. Gana aquel que, pasado su turno, deja montones de una piedra en cada pila. Encuentra una estrategia ganadora para alguno de los ganadores.

Solución. Basta con observar la pila más grande. Supongamos que hay 2^n-1 piedras en la pila más grande antes del movimiento del jugador A. Después de su movimiento, la pila más grande contiene de 2^{n-1} a 2^n-2 piedras. Por lo tanto, el jugador B siempre puede asegurarse de que la pila más grande contenga $2^{n-1}-1$ piedras después de su jugada. En este caso, gana el jugador B.

Entonces, si la cantidad de piedras en el juego original es 2^n-1, entonces Juan podrá ganar. Si el número de piedras en el juego original no es 2^n-1, entonces está entre 2^n y $2^{n+1}-2$ para algún n. En este caso, el primer paso de Alisa es igualar el número de piedras en la pila más grande a 2^n-1. Después de eso, Alisa gana

□

Problema 24. En la pizarra se escriben dos números: 2023 y 2026. Sara y David juegan por turnos, comenzando Sara. En un turno, pueden hacer una de las siguientes acciones:

1. Reducir uno de los números restando uno de sus dígitos no nulos o el dígito no nulo del otro número.

2. Dividir uno de los números por p si es divisible por p, donde $p = 2, 3, 5, 7$.

Gana el primero que escriba un número de una sola cifra. ¿Quién de ellos puede ganar, sin importar cómo juegue su oponente?

Solución. Dejemos que en su primer turno, Sara reemplace 2026 por 2023, y en cada turno siguiente, igualará los números (siempre puede hacerlo repitiendo la jugada de David con el número que David no cambió). Si Sara sigue esta estrategia durante todo el juego, entonces, por supuesto, en algún momento David convertirá uno de los dos números iguales en un número de una sola cifra y ganará.

Pero examinemos ese momento con más detalle. Si David ganó al reemplazar uno de los números X en el par (X, X) por un número de una sola cifra, entonces antes de eso, en el turno de Sara, el número X ya estaba en el tablero. En ese momento, Sara puede reemplazar X por un número de una sola cifra y ganar.

Entonces, formulamos la estrategia completa de Sara: "si es posible reemplazar uno de los números por un número de una sola cifra, hazlo; de lo contrario, iguala los dos números".

□

Problema 25. Tenemos una cantidad de monedas y se sabe que hay exactamente una falsa (difiere en peso de las verdaderas). Utilizando dos pesajes en una balanza de plato sin pesas, determina si la moneda falsa es más ligera o más pesada que la verdadera (no es necesario encontrarla), si hay a) 100; b) 99; c) 98 monedas. (Hay que considerar tres casos).

Solución. a) Primero pongamos 50 monedas en cada plato. Luego tomamos la parte más pesada, la partimos en montones de 25 monedas y los pesamos. Si sus pesos son iguales, entonces la moneda falsa es más ligera que las demás; de lo contrario, es más pesada que las demás.

b) Dividimos las monedas en 3 montones de 33 monedas y pesamos dos de ellos. Si sus pesos son iguales, comparamos cualquier de ellos con el tercero; si el tercer montón es más ligero, entonces la moneda falsa también es más ligera que las demás; de lo contrario, la moneda falsa es más pesada que las demás. Si los pesos de los dos primeros montones son diferentes, entonces pesamos el más pesado de ellos con el tercero. Si sus pesos son iguales, entonces la moneda falsa es más ligera que las demás; si el tercer montón es más ligero, entonces la moneda falsa es más pesada que las otras.

c) Separamos primero dos monedas de las demás, y dividimos el resto en 2 partes de 48 monedas cada una y pesémoslas. Si sus pesos son iguales, entonces pesamos las dos monedas separadas con otras dos cualesquiera; si las monedas apartadas son más ligeras, entonces la moneda falsa es más ligera que el resto, de lo contrario, es más pesada. Si los pesos de los dos primeros montones son diferentes, entonces, de manera similar al punto a), dividimos el más pesado en 2 partes de 24 monedas cada una y las pesamos. Si la balanza muestra igualdad, entonces la moneda falsa es más ligera que las demás; de lo contrario, es más pesada.

□

Problema 26. Demostra que los números $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ no son enteros si $n > 1$.

Solución. Existe $m \geq 1$ tal que $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Está claro que $H_n - \frac{1}{2^m} = \frac{a}{b2^k}$ donde a y b son impares y $k < m$. Por tanto, $H_n = \frac{2^{m-k}a+b}{2^m b}$ es una fracción con el numerador impar y el denominador par. □

Problema 27. Tenemos un conjunto de pesas con las siguientes propiedades:

1. Las pesas son de exactamente 5 pesos diferentes.
2. Para dos pesas cualesquiera, hay otros dos pesas del mismo peso total.

¿Cuál es el menor número de pesas que puede haber en este conjunto?

Solución. Denotemos los pesos de las pesas por $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

Obviamente, un par de pesos $\{a_1, a_2\}$ solo puede equilibrarse con el mismo par. Por lo tanto, hay al menos dos pesas de pesos a_1 y a_2. Un par $\{a_1, a_1\}$ también puede equilibrarse solo con el mismo par. Por lo tanto, hay al menos 4 pesas de peso a_1.

Por razones similares, hay al menos 4 pesas de peso a_5 y al menos dos pesos del peso a_4. Además, por condición hay al menos una pesa de peso a_3. Por lo tanto, hay al menos 4+4+2+2+1=13 pesas en nuestro conjunto.

Por otro lado, es fácil comprobar que un conjunto de 13 pesas: $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$ satisface la condición del problema . □

Problema 28. Sea n un número entero positivo de segundos. Lo escribimos en formato d:hh:mm:ss (días, horas, minutos, segundos). Por ejemplo, si $n = 1000000$, en formato d:hh:mm:ss sería $11 : 13 : 46 : 40$. Luego, nos olvidamos de los dos puntos para obtener un número, y restamos n de él para obtener un número entero m. Por ejemplo, si $n = 1000000$, entonces $m = 11134640 - 1000000 = 10134640$. Determina cuál es el número entero positivo más grande tal que m es divisible por él (para cualquier valor de n).

Solución. Si $60 \leq n < 120$, entonces $m = 100 + (n - 60) - n = 40$. Por tanto la respuesta a este problema será un divisor positivo de 40.

Veamos qué forma tiene el número m. Primero, pasamos el número n al formato d:hh:mm:ss así: si c_0 y r_0 son el cociente y el resto de dividir n por 60, entonces ss$= r_0$. Si c_1 y r_1 son el cociente y el resto de dividir c_0 por 60, entonces mm$= r_1$. Si c_2 y r_2 son el cociente y el resto de dividir c_1 por 24, entonces hh$= r_2$ y d$= c_2$. Escribamos estas relaciones:

$$\begin{aligned} n &= 60 \cdot c_0 + r_0 \\ c_0 &= 60 \cdot c_1 + r_1 \\ c_1 &= 24 \cdot c_2 + r_2 \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} m &= c_2 \cdot 10^6 + r_2 \cdot 10^4 + r_1 \cdot 10^2 + r_0 - n \\ &= c_2 \cdot 10^6 + r_2 \cdot 10^4 + r_1 \cdot 10^2 - 60 \cdot c_0 && \text{(Usando que } n = 60 \cdot c_0 + r_0) \\ &= c_2 \cdot 10^6 + r_2 \cdot 10^4 + r_1 \cdot 10^2 - 60 \cdot (60 \cdot c_1 + r_1) && \text{(Usando que } c_0 = 60 \cdot c_1 + r_1) \\ &= c_2 \cdot 10^6 + r_2 \cdot 10^4 + r_1 \cdot 40 - 3600 \cdot c_1. \end{aligned}$$

Ahora observamos que 40 es un divisor de $10^6, 10^4, 40$ y 3600, por lo que vemos que m siempre es divisible por 40. Esto nos dice que la respuesta a este problema es un múltiplo de 40, y como ya sabíamos que era un divisor de 40, concluimos que la respuesta a este problema es 40.

□

Problema 29. Hay 35 cubos de tamaño idéntico, pintados en seis colores diferentes. Cada cubo está pintado con los seis colores, cada cara con un color único, pero la distribución de los colores en los diferentes cubos puede ser distinta. Los cubos están colocados sobre una mesa formando un rectángulo 5 por 7. Se permite tomar cualquier columna de este rectángulo, girarla alrededor de su eje largo y colocarla nuevamente en su lugar. Lo mismo se permite hacer con las filas. ¿Es posible, mediante estas operaciones, lograr siempre que todos los cubos miren hacia arriba con las caras del mismo color? (Ayuda: analiza primero el caso de 4 cubos que forman 2 filas y 2 columnas).

Solución. Supongamos que uno de los colores es negro. Supongamos que las primeras m filas y los primeros n cubos de la fila $(m+1)$-ésima fila ya están girados con la cara negra hacia arriba. Mostraremos cómo girar el $(n+1)$-ésimo cubo A de esta fila sin estropear los "logros" anteriores.

Giremos las primeras m filas con la cara negra hacia atrás (ahora ninguna operación en las columnas cambiará este estado). Giremos las primeras n columnas de manera que las caras negras de los primeros n cubos de la $(m+1)$-ésima fila queden a la izquierda. Ahora, mediante giros de filas y columnas, giremos el cubo A con la cara negra hacia arriba. Luego, devolvamos las primeras n columnas y las primeras m filas a su estado original.

□

Problema 30. En una circunferencia están marcados 20 puntos. Durante un movimiento, se permite conectar dos de ellos con un segmento que no se cruza con los segmentos dibujados anteriormente. Juegan dos jugadores. El que no puede hacer un movimiento pierde. ¿Existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores? ¿Cual es?

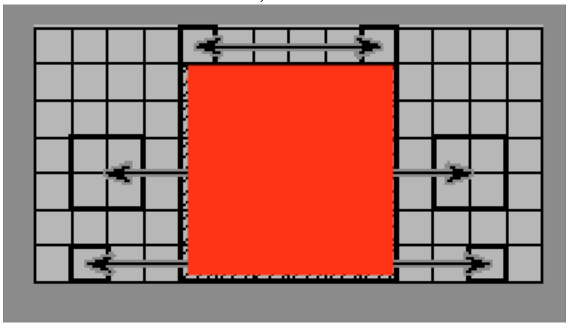
Solución. El primero gana. En el primer movimiento, dibuja un segmento, a ambos lados de la cual hay 9 puntos. Después de eso, para cada movimiento del segundo, responde con un movimiento similar en el otro lado de este segmento.

□

Problema 31. Dos personas juegan en un tablero de 19×94 casillas. Cada uno, por turno, marca un cuadrado siguiendo las líneas de la cuadrícula (de cualquier tamaño posible) y colorea de rojo todas las casillas dentro del cuadrado. Gana quien coloree la última casilla. No está permitido colorear una casilla dos veces. ¿Quién ganará con una estrategia adecuada y cómo se debe jugar?

¿Y que pasa si el tablero inicial es $n \times m$? (n y m son números naturales)

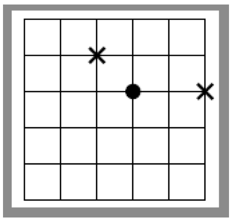
Solución. El primero rellena un cuadrado de 18x18 que se adhiere al lado más largo del rectángulo de manera que el eje de simetría del cuadrado coincida con el eje de simetría del rectángulo (ver figura para un tablero de 7x14).



Luego, con respecto a este eje común, el resto del rectángulo se dividirá en dos partes iguales. Ahora, en cada turno del segundo jugador, el primero responde con un movimiento simétrico, y el primero siempre tiene una jugada disponible, ya que el segundo no puede rellenar un cuadrado que cruce el eje de simetría.

□

Problema 32. El laberinto para ratones (ver figura) es un cuadrado de 5x5 metros, donde los ratones solo pueden correr sólo por los caminos. En dos intersecciones se colocaron trozos de queso idénticos (marcados con cruces). En otra intersección hay un ratoncito sentado (marcado con un círculo). El ratoncito huele el queso, pero necesita correr la misma distancia hacia ambos trozos de queso. Por lo tanto, no sabe qué trozo elegir y se queda pensativo en su lugar.

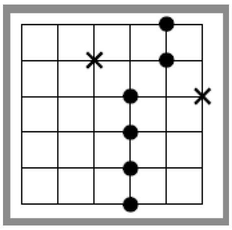


1. Marca otros cinco cruces donde el ratoncito podría sentarse pensativo (desde donde tendría que correr la misma distancia hacia ambos trozos de queso).

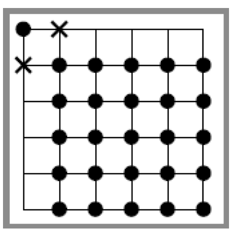
2. Piensa en qué dos intersecciones se podrían colocar trozos de queso de manera que haya la mayor cantidad posible de cruces adecuadas para el ratoncito pensativo.

Solución.

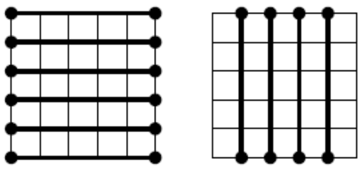
1.



2. El número máximo de lugares para ratoncitos pensativos es 26:



En cualquier ejemplo para el punto 1., uno de los extremos de cada uno de los siguientes 10 segmentos debe estar libre (si ambos extremos están marcados, entonces los trozos de queso deben estar dispuestos en una línea recta perpendicular a ese segmento, lo que significa que habrá exactamente 6 lugares adecuados).



De esto se sigue que no puede haber más de 26 ratones pensativos: si uno de los extremos está libre, entonces tenemos al menos 10 intersecciones sin marcar.

□

Problema 33. Sea F un punto del plano y d una recta del plano que no contiene a F. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de puntos del plano cuya distancia a F coincide con su distancia a la recta l (en matemáticas, nos referimos a $\mathcal{P}$ como la **parábola** de foco F y directriz d). Demuestra que existe una recta l en el plano tal que para todo punto A en $\mathcal{P}$, la circunferencia de diámetro AF es tangente a l.

Solución. Empezamos conjeturando cuál tiene que ser la recta l. Sea x la distancia de F a d. Si trazamos la recta paralela a d que pasa por F y marcamos los dos puntos en esa recta que están a distancia d de F, vemos que esos dos puntos están en la parábloa $\mathcal{P}$. Sean P y P' esos dos puntos. La recta l tiene que ser tangente a los círculos de diámetro FP y FP', por lo que sólo hay tres posibilidades:

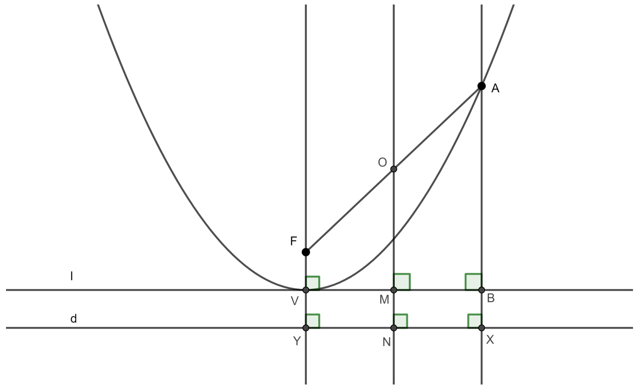
- la recta l es la recta perpendicular a d que pasa por F,
- la recta l es la recta paralela a d que equidista de F y de d, o
- la recta l es la recta paralela a d que está a distancia $\frac{x}{2}$ de F y a distancia $\frac{3x}{2}$ de d.

Sea V el punto en la recta perpendicular a d que pasa por F que equidista de F y d, es decir, el único punto de la recta perpendicular a d que pasa por F y que está en la parábola $\mathcal{P}$. El círculo de diámetro VF no es tangente a la recta perpendicular a d que pasa por F, por lo que el primer caso queda descartado.

Descartemos ahora el tercer caso. Supongamos que l es la recta paralela a d que está a distancia $\frac{x}{2}$ de F y a distancia $\frac{3x}{2}$ de d. Sean P y P' los dos puntos en l que están a distancia $\frac{3x}{2}$ de F, es decir, los dos puntos de intersección de l con $\mathcal{P}$. La circunferencia de diámetro FP corta a l al menos en el punto P, por lo que es tangente a l si y sólo si FP es perpendicular a l. Similarmente, se tiene que cumplir que FP' es perpendicular a l. En particular, FP y FP' tendrían que ser paralelas, y eso es imposible porque P y P' están a lados opuestos de la recta perpendicular a d que pasa por F.

Por tanto, concluimos que l tiene que ser la recta paralela a d que equidista de F y de d. Ahora que tenemos un candidado concreto para l (el único candidato posible), vamos a demostrar que l cumple que para todo punto A en $\mathcal{P}$, la circunferencia de diámetro AF es tangente a l.

Escogemos un punto cualquiera A en $\mathcal{P}$ y llamamos O al punto medio entre A y F, es decir, al centro de la circunferencia de diámetro AF. Si A es el punto de intersección de $\mathcal{P}$ con la recta perpendicular a d que pasa por F, entonces la circunferencia de diámetro AF es tangente a l porque l es perpendicular a AF y l contiene a A. Por tanto, podemos asumir que A no es ese punto, y esto es equivalente a asumir que AF no es perpendicular a d. Trazamos perpendiculares a d pasando por los puntos A, O y F, y llamamos B, M, V y X, N, Y a sus correspondientes puntos de intersección con l y d respectivamente, como indica la figura, donde la curva es la parábola $\mathcal{P}$:



Nuestro objetivo es demostrar que $|OF| = |OM|$.

Como A está en $\mathcal{P}$, tenemos que $|AF| = |AX|$. Por tanto, el triángulo AFX es isósceles, y $\angle AFX = \angle FXA$.

Como O es el punto medio entre A y F, el teorema de Tales nos dice que M es el punto medio entre V y B y que N es el punto medio entre Y y X. Como l equidista de F y D, observamos que los triángulos FVM y MNX son congruentes. Con esto concluimos que F, M y X están alineados, y que, de hecho, M es el punto medio del segmento FX. Usando esto, vemos que los triángulos OFM y AFX son semejantes. En particular, OFM es isósceles, con $|OF| = |OM|$, y esto concluye nuestra demostración.

$\square$

Problema 34. Dos personas juegan a un juego. Al comienzo, los números 1, 2, 3 y 4 están dispuestos en círculo. En cada turno, el primer jugador suma 1 a dos números adyacentes, mientras que el segundo jugador intercambia las posiciones de dos números adyacentes. El primer jugador gana si todos los números se vuelven iguales. ¿Puede el segundo jugador evitar que esto suceda?

Solución. Demostraremos que el segundo jugador puede lograr que, antes de cada turno del primero, los números pares e impares se alternen. De esta manera, en su turno, el primer jugador no podrá hacer que todos los números sean iguales y no ganará el juego. Observemos que inicialmente los números pares e impares se alternan. Después de cada turno del primer jugador, obtendremos dos números pares y dos números impares consecutivos. El segundo jugador intercambia el número par y el número impar adyacente. Después de este movimiento, los números pares e impares vuelven a alternarse. $\square$

Problema 35. En el escaparate de una joyería hay 15 diamantes. Junto a ellos hay etiquetas indicando sus pesos, que van desde 1 hasta 15 quilates. El vendedor tiene una balanza de platillos y cuatro pesas con pesos de 1, 2, 4 y 8 quilates. Al comprador solo se le permite realizar un tipo de pesaje: colocar uno de los diamantes en un platillo de la balanza y las pesas en el otro, asegurándose de que el peso indicado en la etiqueta correspondiente sea correcto. Sin embargo, por cada pesa tomada, el comprador debe pagar al vendedor 100 monedas. Si una pesa se retira de la balanza y no se utiliza en la siguiente pesada, el vendedor la recupera. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que el comprador tendrá que pagar para verificar los pesos de todos los diamantes?

Solución. Veamos una solución:

Qué pesas compramos	Qué estamos pesando	Cuántas monedas hemos pagado
1	1=1	100
2	1+2=3, 2=2	200
4	2+4=6	300
1	1+2+4=7, 1+4=5, 4=4	400
8	4+8=12	500
1	1+4+8=13	600
2	1+2+4+8=15, 2+4+8=14, 2+8=10	700
1	1+2+8=11, 1+8=9, 8=8	800

Así que lo podemos hacer por el precio de 800 monedas. Veamos ahora que no se puede pagar menos.

En cada pesaje, compramos una o varias pesas, o las devolvemos al vendedor. Por lo tanto, en total, hemos comprado y devuelto $N \geq 15$ pesas. Después del último pesaje, todavía tenemos al menos una pesa en nuestras manos, lo que significa que hemos comprado más de las que hemos devuelto. Esto significa que hemos comprado más de la mitad de N, es decir, al menos 8 pesas, lo que implica que hemos pagado al avaro vendedor al menos 800 monedas.

Según la solución, se puede observar que el orden óptimo de las pesadas recorre todas las posibles combinaciones de pesas, donde conjuntos vecinos difieren en la adición o eliminación de exactamente una pesa. Esta secuencia de conjuntos se conoce como un código Gray.

$\square$

Problema 36. Encuentra todos los cuadrados perfectos (es decir, números enteros positivos que son iguales a otro entero positivo elevado al cuadrado) que se pueden expresar como la suma de dos potencias de 2.

Solución. La respuesta son los números de la forma $4^k = (2^2)^k = 2^{2k} = (2^k)^2$ y $9 \cdot 4^k = (3 \cdot 2^k)^2$ para todo $k \geq 1$.

Sea $k \geq 1$. $9 \cdot 4^k = (1 + 2^3)(2^{2k}) = 2^{2k} + 2^{2k+3}$, y $4^k = 2^{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-1}$, por lo que esos cuadrados perfectos son suma de dos potencias de dos.

Veamos que no hay más posibilidades. Sean $n, m \geq 1$, con $n \leq m$. Supongamos que $2^n + 2^m$ es un cuadrado perfecto. Tenemos dos casos:

- Caso $n = m$: Nuestro objetivo va a ser demostrar que si $2^n + 2^m$ es un cuadrado perfecto, con $n = m$, entonces $2^n + 2^m = 4^k$ para algún $k \geq 1$. Si $n = m$ tenemos que $2^n + 2^m = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, que es un cuadrado perfecto si y sólo si $n + 1$ es par, si y sólo si 2^{n+1} es una potencia de 4 (es decir, existe $k \geq 1$ tal que $2^{n+1} = 4^k$.
- Caso $n < m$: Nuestro objetivo va a ser demostrar que si $2^n + 2^m$ es un cuadrado perfecto, con $n < m$, entonces $2^n + 2^m = 9 \cdot 4^k$ para algún $k \geq 1$. En este caso tenemos que $2^n + 2^m = 2^n \cdot (1 + 2^{m-n})$. Como $m - n \geq 1$, tenemos que $1 + 2^{m-n}$ es un número impar y por tanto $2^n \cdot (1 + 2^{m-n})$ es un cuadrado perfecto si y sólo si n es par y $(1 + 2^{m-n}) = l^2$ para algún entero positivo impar l. Hemos reducido nuestro objetivo aa demostrar que si $(1 + 2^{m-n}) = l^2$ para algún entero positivo impar l, entonces $l = 3$.

  Tenemos que $(1 + 2^{m-n}) = l^2$ si y sólo si $2^{m-n} = l^2 - 1 = (l-1)(l+1)$. Esto ocurre si y sólo si $(l-1)$ y $(l+1)$ son potencias de dos cuya diferencia es 2, que ocurre si y sólo si $l - 1 = 2$ y $l + 1 = 4$. Esto a su vez ocurre si y sólo si $l = 3$, por lo que queda demostrado el objetivo de este caso.

$\square$

Problema 37. Sea $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n números enteros positivos (distintos dos a dos) tales que

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 2021 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

1. Si $n = 3$, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar $a_1 + a_2 + a_3$?
2. Si $n = 4$, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$?
3. Si $n \geq 5$, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$?

Solución. La factorización en números primos de 2021 es $43 \cdot 47$. Por tanto, reordenando, podemos asumir que estamos en uno de estos dos casos:

- Caso 1: $2021 \mid a_1$.
- Caso 2: $43 \mid a_1$ y $47 \mid a_2$.

Además, si el mínimo de las sumas que buscamos es ≤ 2021, eso sólo será posible en el Caso 2. Así que en principio, parece que el caso 2 nos puede dar ejemplos más pequeños, y nuestra estrategia va a ser encontrar ejemplos de conjuntos S que cumplan las propiedades del enunciado y estén en el Caso 2.

a) La respuesta es 240. Vamos a intentar encontrar ejemplos para $n = 3$, dentro del caso 2. Lo más sencillo sería que $a_1 = 43$ y $a_2 = 47$. Si esto ocurre, la relación entre la suma y el producto de los elementos de S nos dice que $a_3 = 90 + a_3$, que es imposible.

Lo siguiente más sencillo dentro del caso 2 sería que $a_1 = 43 \cdot 2 = 86$ y $a_2 = 47$. Si esto ocurre, la relación entre la suma y el producto de los elementos de S nos dice que $2a_3 = 133 + a_3$, que nos da como respuesta $S = \{43, 47, 133\}$. La suma de los elementos de S en este caso es $266 < 2021$, así que ningún S en el caso 1 nos podrá dar la respuesta a esta pregunta.

Intentamos analizar todos las posibilidades dentro del caso 2. En ese caso, $S = \{43 \cdot a, 47 \cdot b, x\}$, y

$$abx = 43a + 47b + x.$$

Para que se obtenga un mínimo de la suma menor que 266, tiene que ocurrir que $43a+47b+x < 266$, y ya sabemos que a y b no pueden ser ambas 1. En particular, $43a + 47b < 265$. Por tanto, las posibilidades para a y b que no hemos analizado ya son

$$\begin{aligned} a &= 1, \quad b = 2 \\ a &= 1, \quad b = 3 \\ a &= 1, \quad b = 4 \\ a &= 2, \quad b = 2 \\ a &= 2, \quad b = 3 \\ a &= 3, \quad b = 1 \\ a &= 3, \quad b = 2 \\ a &= 4, \quad b = 1 \\ a &= 5, \quad b = 1 \end{aligned}$$

Despejando x en la ecuación $abx = 43a + 47b + x$, obtenemos que $x = \frac{43a+47b}{ab-1}$. La suma de los elementos de S es pues

$$43a + 47b + \frac{43a + 47b}{ab - 1}.$$

Si calculamos esta cantidad para todos los valores de a y b posibles (e imponemos que esta cantidad sea un número entero), vemos que el mínimo se alcanza cuando $a = 2$, $b = 2$, y en ese caso la suma es $86 + 94 + 60 = 240$.

b) La respuesta es 112. Vamos a intentar encontrar ejemplos para $n = 4$, dentro del caso 2. Lo más sencillo sería que $a_1 = 43$ y $a_2 = 47$. Si esto ocurre, la relación entre la suma y el producto de los elementos de S nos dice que

$$a_3 \cdot a_4 = 43 + 47 + a_3 + a_4 = 90 + a_3 + a_4.$$

Transformamos esta ecuación en

$$(a_3 - 1)(a_4 - 1) = 91 = 7 \cdot 13,$$

por lo que sus soluciones son (salvo orden)

$$\begin{aligned} a_3 &= 2, \quad a_4 = 92 \\ a_3 &= 8, \quad a_4 = 14 \end{aligned}$$

De estas, la suma de todos los elementos de S es menor para la segunda solución, en la que obtenemos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 43 + 47 + 8 + 14 = 112 < 43 \cdot 2 + 47 < 2021$$

Por tanto, el S para el cual se obtiene el mínimo de la suma de sus elementos satisfará que 43 y 47 son elementos de S, así que el mínimo de la suma en este caso es 112.

c) La respuesta es 105. Vamos a intentar encontrar ejemplos para $n = 5$, dentro del caso 2. Lo más sencillo sería que $a_1 = 43$ y $a_2 = 47$. Si esto ocurre, la relación entre la suma y el producto de los elementos de S nos dice que

$$a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 43 + 47 + a_3 + a_4 + a_5 = 90 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Como queremos que la suma sea lo más pequeña posible, vamos a intentar encontrar soluciones a esta ecuación con números pequeños. Si $a_3 = 1$, obtendríamos que

$$\begin{aligned} a_4 \cdot a_5 &= 91 + a_4 + a_5, \\ a_4 \cdot a_5 - a_4 - a_5 + 1 &= 92, \\ (a_4 - 1)(a_5 - 1) &= 92 = 23 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Por lo que, las soluciones son (salvo orden)

$$\begin{aligned} a_4 = 24, &\quad a_5 = 5 \\ a_4 = 47, &\quad a_5 = 3 \\ a_4 = 93, &\quad a_5 = 2 \end{aligned}$$

La segunda solución no es válida, porque todos los a_i tienen que ser distintos. La suma de todos los a_i es $43 + 47 + 1 + 24 + 5 = 120$ en el primer caso, y mayor en el tercero, así que tenemos 120 como cota superior a nuestra solución. De hecho, podemos observar lo siguiente: **como $120 < 2 \cdot 43 + 47 = 133 < 21$, obtenemos que para que se obtenga el mínimo, S tiene que contener a 43 y 47. Por tanto, sin pérdida de generalidad, sabemos que el ejemplo que buscamos tiene $a_1 = 43$ y $a_2 = 47$. Observamos también que aún no conocemos para qué valor de n se obtendrá el mínimo, aunque como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 > 30$, obtenemos que $n \leq 9$.**

Necesitamos más ejemplos. Hacemos $a_3 = 2$. En ese caso, repitiendo el proceso obtenemos que

$$\begin{aligned} 2a_4a_5 &= 92 + a_4 + a_5, \\ 2 \cdot (2a_4a_5 - a_4 - a_5) + 1 &= 2 \cdot 92 + 1 \\ (2a_4 - 1)(2a_5 - 1) &= 185 = 5 \cdot 37 \end{aligned}$$

Por lo que, las soluciones son (salvo orden)

$$\begin{aligned} a_4 = 3, &\quad a_5 = 19 \\ a_4 = 93, &\quad a_5 = 1 \end{aligned}$$

Observamos que la segunda solución ya la habíamos obtenido analizando el caso $a_3 = 1$. Calculamos la suma de todos los elementos de S para la primera solución, y obtenemos que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 43 + 47 + 2 + 3 + 19 = 114 < 120$, por lo que este ejemplo mejora el encontrado anteriormente. **Observamos también que como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 > 24$, obtenemos que el valor n para el cual se obtendrá el mínimo es $n \leq 8$.**

Vamos a encontrar más ejemplos. Hacemos $a_3 = 3$. En ese caso, repitiendo el proceso obtenemos que

$$\begin{aligned} 3a_4a_5 &= 93 + a_4 + a_5, \\ 3 \cdot (3a_4a_5 - a_4 - a_5) + 1 &= 3 \cdot 93 + 1 \\ (3a_4 - 1)(3a_5 - 1) &= 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Por lo que las soluciones son (salvo orden)

$$\begin{aligned} a_4 = 1, &\quad a_5 = 47 \\ a_4 = 3, &\quad a_5 = 12 \\ a_4 = 5, &\quad a_5 = 7 \end{aligned}$$

La primera solución ya se obtuvo (salvo orden) en el caso $a_3 = 1$, la segunda no es válida porque $a_3 = a_4$. La suma de los elementos de S para la tercera solución es

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 43 + 47 + 3 + 5 + 7 = 105 < 114$$

por lo que este es el mejor ejemplo que tenemos hasta ahora. **Observamos también que como $1+2+3+4+5 = 15 = 105-90$, obtenemos que se puede obtener el mínimo para un valor de $n \leq 6$.**

Vamos a ver que el último ejemplo que hemos encontrado nos da la mínima suma posible. En caso contrario, el sistema

$$\begin{cases} a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 90 + a_3 + a_4 + a_5, \\ a_3 + a_4 + a_5 < 15. \end{cases}$$

tendría una solución en la que todas las variables toman valores enteros positivos, o el sistema

$$\begin{cases} a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 = 90 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < 15. \end{cases}$$

tendría una solución en la que todas las variables toman valores enteros positivos. En cualquier caso, $\sum_{i=3}^{n} a_i < 15$ (para $n = 5, 6$). Notamos que si $n = 5$, esto es imposible si $a_5 > a_4 > a_3 \geq 4$, y los casos restantes (salvo orden) ya los hemos tratado. Por tanto, sólo nos queda por analizar el caso $n = 6$, y $\sum_{i=3}^{n} a_i < 15$ sólo es posible (salvo orden) en los siguientes casos

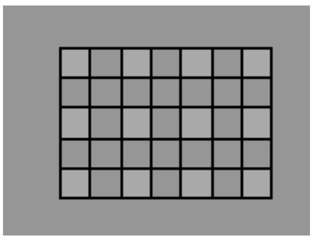
$$\begin{array}{c}
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 4 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 5 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 6 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 7 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 8 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 5 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 6 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 7 \\
a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 5, a_6 = 6 \\
a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5 \\
a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 6 \\
a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5
\end{array}$$

Se puede comprobar uno a uno que ninguna de estas dan lugar a un S que satisfaga las condiciones del enunciado. Por tanto, la respuesta a esta pregunta es 105.

□

Problema 38. ¿Es posible cubrir un rectángulo de tamaño 5×7 con esquinas de tres celdas (es decir, figuras que se obtienen de un cuadrado de tamaño 2×2 quitando una celda) que no se sobresalen en varias capas, de tal forma que cada celda del rectángulo quede cubierto por el mismo número de celdas pertenecientes a las esquinas?

Solución. Pintemos las celdas del rectángulo en colores blanco y negro como se muestra en la figura.



En las celdas blancas escribimos el número -2 y en las negras el número 1. Nótese que la suma de los números en las celdas cubiertas por cualquier esquina no es negativa, por lo tanto, si logramos cubrir el rectángulo en k capas que satisfacen la condición, entonces la suma S de los números sobre todas las celdas, cubiertas con esquinas, es no negativa. Pero si la suma de todos los números en el rectángulo es s, entonces $S = ks = k(-2 \cdot 12 + 23 \cdot 1) = -k > 0$. Contradicción.

□

Problema 39. Entre 25 jirafas, cada dos de las cuales tienen alturas diferentes, se lleva a cabo un concurso de "¿Quién es más alto?". En cada ocasión, salen al escenario cinco jirafas, y un l jurado las clasifica justamente (según su altura) asignándoles lugares del primero al quinto. ¿Cómo deberían organizarse las salidas de las jirafas para determinar el primer, segundo y tercer premio del concurso después de siete salidas?

Solución. Dividiremos todas las jirafas en cinco grupos de cinco jirafas cada uno. Compararemos las jirafas dentro de cada grupo. Esto requerirá 5 salidas. En la sexta salida, compararemos las jirafas más altas de cada grupo. Después de eso, etiquetaremos los grupos con las letras A, B, C, D, E en orden decreciente de altura de las jirafas más altas en el grupo, y las jirafas dentro de cada grupo se etiquetarán con los índices 1, 2, 3, 4, 5 en el mismo orden decreciente de su altura.

Notaremos que las jirafas de los grupos C y D no pueden ser ganadoras, ya que la altura de cada una de ellas es menor que la altura de las jirafas A_1, B_1 y C_1. Tampoco pueden ser ganadores los jirafas A_4, A_5, B_3, B_4, B_5 ,C_2, C_3, C_4 y C_5. Por lo tanto, solo pueden ser ganadores seis jirafas: A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y C_1. Pero ya sabemos que la jirafa etiquetada como A_1 es la más alta. Con la séptima salida, compararemos las 5 jirafas restantes y, por lo tanto, determinaremos las jirafas que ocupan el segundo y tercer lugar.

□

Problema 40. ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2?. Justificar la respuesta.

Solución. No existe.

Sean n y m dos enteros tal que 2^n y 2^m tienen el mismo número de dígitos, con $n > m$. Si 2^n y 2^m tienen el mismo número de dígitos, entonces $2^n - 2^m = 2^m(2^{n-m} - 1)$ tiene como mucho los mismos dígitos que 2^m, y por tanto $2^{n-m} - 1 < 10$. Por tanto, $1 \leq n - m \leq 3$. y $2^{n-m} - 1$ es 1, 3 o 7.

Supongamos que 2^n y 2^m no tienen ningún dígito igual a 0 y además uno de ellos es una reordenación de los dígitos del otro. Como todo número es congruente a la suma de sus cifras módulo 9, tenemos que $2^n - 2^m$ es congruente con 0 módulo 9, es decir, 9 divide a $2^n - 2^m = 2^m(2^{n-m} - 1)$. Como 2^m no es divisible por 3, y $2^{n-m} - 1$ no es divisible por 9 por el párrafo anterior, esto es imposible.

□

Problema 41. Explica cómo colorear una parte del plano para que haya exactamente cuatro puntos coloreados en cada circunferencia de 1 cm de radio.

Solución. Dibujamos rectas paralelas a 1 cm. de distancia □

Problema 42. Cris elige 50 números enteros positivos consecutivos y los escribe formando en un círculo en la pizarra. Cada minuto que pasa, Cris reemplaza simultáneamente cada uno de estos números x por $2020a - x + 2020b$, donde a y b eran los números que estaban al lado de x. Por ejemplo, si Cris escribe los números $1, 2, 3, 4, \ldots, 50$ en un círculo, al minuto siguiente tendrá

$$2020 \cdot 2 - 1 + 2020 \cdot 50, 2020 \cdot 3 - 2 + 2020 \cdot 1, 2020 \cdot 4 - 3 + 2020 \cdot 2, 2020 \cdot 5 - 4 + 2020 \cdot 3, \ldots, 2020 \cdot 1 - 50 + 2020 \cdot 49.$$

¿Puede Cris elegir los 50 números consecutivos de manera que nunca escriba un número negativo en la pizarra, por mucho rato que siga el proceso de reemplazar números?

Ayuda: Si $0 < a < 1$ se tiene que $1 > a > a^2 > a^3 > a^4 > \ldots > 0$. De hecho, usando herramientas matemáticas que quizás aún no conozcas según en qué curso estés, se puede demostrar que a^n se acerca a 0 todo lo que queramos si hacemos que n tome un valor lo suficientemente grande. Puedes usar esto último en la resolución de este ejercicio si fuera necesario.

Solución. Observamos que el proceso de reemplazar números que sigue Cris cambia números impares por impares y números pares por pares. Sea I_n la suma de los números impares en la pizarra en el minuto n, y sea P_n la suma de los números pares en la pizarra en el minuto n.

Observamos que $I_{n+1} = 4040P_n - I_n$ y $P_{n+1} = 4040I_n - P_n$.

Si $n = 0$ corresponde a la situación inicial y a es el número más pequeño que elige Cris, tenemos que

$$I_0 + P_0 = 50(a-1) + \frac{51 \cdot 50}{2} = 50a + 25 \cdot 49$$

y que

$$|P_0 - I_0| = 25.$$

Además, para todo $n \geq 0$,

$$P_{n+1} - I_{n+1} = -4041(P_n - I_n)$$

y

$$P_{n+1} + I_{n+1} = 4039(P_n + I_n).$$

Por tanto, para todo $n \geq 0$,

$$|P_n - I_n| = (4041)^n |P_0 - I_0| = (4041)^n \cdot 25,$$

y

$$P_n + I_n = (4039)^n (P_0 + I_0) = (4039)^n \cdot (50a + 25 \cdot 49).$$

Así, observamos que

$$|P_n - I_n| - (P_n + I_n) = (4041)^n \cdot 25 \cdot \left(1 - \left(\frac{4039}{4041}\right)^n \cdot (2a + 49)\right).$$

Como $0 < \frac{4039}{4041} < 1$, tenemos que $\left(\frac{4039}{4041}\right)^n$ es siempre un número positivo que se va acercando más y más a 0 conforme hacemos n más y más grande. En particular, existirá un número n_0 tal que la cantidad $1 - \left(\frac{4039}{4041}\right)^n \cdot (2a + 49)$ será positiva para todo $n \geq n_0$. En particular, para todo $n \geq n_0$, tendremos que

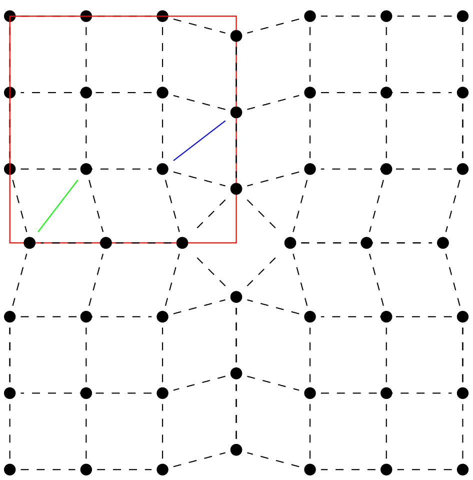
$$|P_n - I_n| > P_n + I_n$$

lo que implica que o $P_n < 0$ o $I_n < 0$. En cualquier caso, para que esto sea verdad al menos uno de los números de la pizarra en el minuto n tiene que ser negativo. Por tanto, elija Cris los números que elija, siempre llegará un momento en el que a partir de él, siempre hay al menos un número negativo en la pizarra.

□

Problema 43. ¿Se puden colocar 48 puntos en el interior de un cuadrado de lado 6 cm. de manera que todo par de esos puntos está a más (>) de 1 cm de distancia? ¿Por qué? Los puntos del borde del cuadrado no están en el interior de éste.

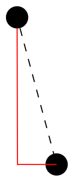
Solución. Se puede de esta manera: Cada línea punteada corresponde a una distancia de 1.01 cm. En el centro del dibujo hay un cuadrado, y de cada uno de sus lados sale un triángulo rectángulo. Si una línea punteada parece horizontal o vertical en el dibujo, es que lo es.



Para demostrar que este dibujo cabe en el interior de un cuadrado de lado 6 basta demostrar que el cuadrado rojo tiene lado < 3 cm, así como que las distancias marcadas en el dibujo en azul y en verde son mayores que 1 cm.

Las distancias azules y verdes son las diagonales menores de un rombo de lado 1.01 cm, y ángulos interiores de $75°$ y $105°$. Por tanto, la distancia azul es igual a la distancia verde. Como $75 > 60$, mirando al triángulo que forma la distancia azul con dos de los lados del rombo del que es una diagonal podemos observar que la distancia azul será mayor que 1.01 cm, y en particular será mayor que 1.

Demostremos ahora que el cuadrado rojo tiene lado < 3 cm. Miramos a la esquina inferior de su lado izquierdo:



Sea a su lado vertical y b su lado horizontal. El teorema de Pitágoras nos dice que $a^2+b^2 = (1.01)^2$, el lado izquierdo del cuadrado rojo mide $2\cdot 1.01+a$ y el lado de abajo del cuadrado rojo mide $2\cdot 1.01+b+\frac{1.01\sqrt{2}}{2}$. Como todos los lados del cuadrado rojo son iguales, obtenemos que $a = b + \frac{1.01\sqrt{2}}{2}$. Sustituyendo el valor de b en la ecuación $a^2 + b^2 = (1.01)^2$, obtenemos que

$$a^2 + \left(a - \frac{1.01\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (1.01)^2,$$

es decir,

$$2a^2 - 1.01\sqrt{2}a - \frac{(1.01)^2}{2} = 0,$$

que nos da como soluciones

$$a = \frac{1.01\sqrt{2} \pm \sqrt{6\cdot(1.01)^2}}{4} = \frac{1.01\cdot(\sqrt{2}\pm\sqrt{6})}{4}.$$

Sólo una de estas dos soluciones es positiva (y por tanto, el valor del lado a del triángulo rectángulo dibujado anteriormente. Hemos hallado que

$$a = \frac{1.01\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4} \simeq 0.97558508455,$$

Por lo que el lado del cuadrado rojo mide $2\cdot 1.01 + a < 2.9956 < 3$, lo que concluye nuestra demostración.

$\square$

Problema 44. Acher escoge dos números reales distintos, llama x al más pequeño de los dos e y al más grande. Luego, escoge entre x a y de manera aleatoria y le dice a Bárbara su valor, sin decirle si se corresponde con x o con y. A Bárbara le gustaría adivinar si Acher le ha dicho el valor de x o de y, pero no puede hacerle ninguna pregunta a Acher.

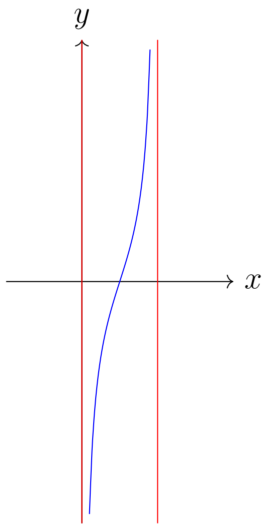
a) Si Bárbara sabe que los números que ha elegido Acher están en el intervalo $(0,1)$, explica qué estrategia puede seguir Bárbara para tener más de un 50% de posibilidades de adivinar si el valor que le ha dicho Acher se correspondía con x.

b) Si la única información de la que dispone Bárbara sobre los números que ha escogido Acher es que son dos números reales distintos, ¿es posible que Bárbara tenga más de un 50% de posibilidades de adivinar si el valor que le ha dicho Acher se correspondía con x?

Solución. a) Antes de jugar, Bárbara va a elegir un número real T al azar en el intervalo $(0,1)$. Cuando Acher le diga un número, Bárbara dirá que ese número era x si el número que le dice Acher es menor que T, y Bárbara dirá que ese número era y en caso contrario. Con esta estrategia, Bárbara tendrá razón si T está en el intervalo $(x,y]$. Sin embargo, si T no está en ese intervalo, sus posibilidades de acertar son del 50%. Si $T \leq x < y$, entonces Bárbara dirá que el número que le ha dicho Acher era y, pero es igual de probable que Acher le haya dicho el valor de x que de y. Por otra parte, si $T > y > x$, Bárbara dirá que el número que le ha dicho Acher era x, pero es igual de probable que Acher le haya dicho el valor de x que de y.

Para que esta estrategia le de más de un 50% de posibilidades a Bárbara, tiene que ocurrir que la probabilidad de elegir de manera aleatoria un valor de T que esté en el intervalo $(x,y]$ que ha escogido Acher sea positiva, sin importar qué haya escogido Acher. Calculemos esa probabilidad (como un número entre 0 y 1). La probabilidad de que T esté en el intervalo $(x,y]$ es $y-x$, que es un número estrictamente mayor que 0 haya elegido Acher lo que haya elegido.

b) Consideramos la función $f(x) = \tan\left(\pi \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. Su dominio es $(0,1)$, su imagen es toda la recta real, y es creciente en todo su dominio. La fórmula concreta para $f(x)$ no es importante, lo único que vamos a usar en nuestro razonamiento es que su gráfica tiene esta forma, con dos asíntotas verticales en $x=0$ y $x=1$:



Esta función tiene una función inversa $g(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$ con dominio toda la recta real e imagen el intervalo $(0,1)$ (que tiene una función inversa también puede verse gráficamente, no hace falta la fórmula). El suceso $x < T \leq y$ ocurre exactamente cuando $g(x) < g(T) \leq g(y)$. Por tanto, Bárbara puede seguir una estrategia similar a la del apartado anterior de esta manera. Primero elige t en $(0,1)$ de manera aleatoria, llama T a $f(t)$, y sigue la estrategia del apartado anterior con T. Esto funciona porque la probabilidad de que T esté en el intervalo $(x,y]$ coincide con la probabilidad de que t esté en el intervalo $(g(x), g(y)]$, que es $g(y)-g(x)$. Este número es siempre positivo (aunque puede ser pequeñísimo), haya elegido Acher lo que haya elegido.

Observación: Los alumnos de segundo de bachiller que hayan aprendido probabilidad condicionada podrán calcular que la probabilidad de que Bárbara acierte siguiendo su estrategia es de

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - (y-x)) + 1 \cdot (y-x) = \frac{1}{2} + \frac{y-x}{2}$$

para la pregunta a) y de

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - (g(y) - g(x))) + 1 \cdot (g(y) - g(x)) = \frac{1}{2} + \frac{g(y)-g(x)}{2}$$

para la pregunta b).

□

Problema 45. Harry Potter quiere salir de una habitación circular con seis puertas, cinco de las cuales están cerradas con llave. En un intento, puede revisar tres puertas adyacentes y, si una de ellas no está cerrada con llave, puede salir por ella. Después de cada intento, Voldemort cierra la puerta que se abrió y abre una de las puertas adyacentes. Harry Potter no sabe que puerta se abrirá. Busca una estrategia para ayudar a Harry a salir de la habitación.

Solución. Numeremos las puertas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, por ejemplo, en sentido de las agujas de reloj. En su primer intento, Harry Potter verifica las puertas 1, 2 y 3. Si después de esto no logra salir de la habitación, significa que las puertas 1, 2 y 3 estaban cerradas con llave. La puerta 2 permanecerá cerrada incluso después de que Voldemort cierre la puerta abierta y abra una de las vecinas.

En su segundo intento, Harry Potter verifica las puertas 3, 4 y 5. Si después de esto no logra salir de la habitación, significa que la puerta 5 estaba cerrada con llave, y dado que la puerta 2 ya está cerrada, podemos afirmar que las puertas 3 y 4 también permanecerán cerradas después de las acciones de Valdemort.

Ahora, Harry Potter verifica las puertas 5, 6 y 1. Razonando de manera similar, obtenemos que si Harry Potter no logra salir de la habitación, las puertas 4, 5 y 6 permanecerán cerradas, lo que significa que una de las puertas 1, 2 o 3 estará desbloqueada. Al verificar estas tres puertas en su próximo intento, Harry Potter saldrá de la habitación de manera garantizada.

□

Problema 46. El dragón ha encerrado a seis enanitos en una cueva y les ha dicho: "Tengo siete sombreros de los siete colores del arco iris. Mañana por la mañana os vendaré los ojos y colocaré un sombrero en la cabeza de cada uno, escondiendo uno de los sombreros. Luego os quitaré las vendas de los ojos, y podréis ver los sombreros en las cabezas de los demás, pero no os permitiré comunicarse entre vosotros. Después de eso, cada uno en secreto me dirá el color del sombrero que está escondido. Si al menos tres aciertan, os liberaré. Si aciertan menos, me os comeré para el almuerzo". ¿Cómo pueden los enanitos acordar de antemano un plan para salvarse?

Solución. Numeremos los colores del 1 al 7 (por ejemplo, en el mismo orden que los colores del arco iris). Si un enanito no ve dos sombreros del mismo color con la misma paridad, entonces nombra el color con el número más grande, y si los colores que no ve tienen paridades diferentes, nombra el color con el número más pequeño. Cualquier que sea el color del sombrero escondido, exactamente tres enanitos lo nombrarán. Por ejemplo, si el sombrero escondido es de color 3, los enanitos que llevan sombreros de los colores 1, 4 y 6 adivinarán correctamente. Los otros casos se pueden resolver de manera similar.

El principio de acción de los enanitos, tal como se describe en la solución se aplica en torneos de ajedrez de una ronda con un número impar de participantes para que cada jugador juegue un número igual de partidas como blancas y negras. Específicamente, cada participante en el torneo recibe un número, y si se encuentran jugadores con números de la misma paridad, el que tenga el número más grande juega como blancas, y si los números de los participantes tienen paridades diferentes, el que tenga el número más pequeño juega como blancas. Se puede demostrar que en este caso, cada jugador jugará un número igual de partidas como blancas y negras.

Se puede demostrar que ningún acuerdo permitirá adivinar con certeza el color del sombrero escondido a más de la mitad de los enanitos.

□

Problema 47. Dentro de una caja grande, hay dos cajas más pequeñas, dentro de cada una de ellas hay dos cajas aún más pequeñas, y así sucesivamente durante n iteraciones. Dentro de cada una de las 2^n cajas más pequeñas, hay una moneda, algunas con la cara hacia arriba y otras con la cruz hacia arriba. En un solo movimiento, puedes voltear una caja completa junto con su contenido. Debes demostrar que en no más de n movimientos puedes organizar las cajas de manera que el número de monedas con la cara hacia arriba sea igual al número de monedas con la cruz hacia arriba.

Solución. Llamaremos a la caja más grande la caja de rango n, las dos siguientes en tamaño las cajas de rango $n-1$ y así sucesivamente hasta las cajas de rango 1, en los cuales hay monedas. La diferencia entre la cantidad de cruces y caras en alguna caja se llama el defecto de ese caja, y denotaremos el defecto de la caja de rango n por d.

Vamos a demostrar que siempre habrá una caja, tal que al voltearlo, $|d|$ disminuirá al menos a la mitad. Esto es suficiente ya que en la posición inicial $|d| \leq 2^n$, y d es par porque hay un número par de monedas.

Consideremos el caso en que $d > 0$. Supongamos que la disminución mencionada es imposible. Cuando volteamos una caja con un defecto e, restas $2e$ de d. Según nuestra suposición, $|d - 2e| > \frac{d}{2}$, por lo tanto, o $e < \frac{d}{4}$ ó $e > \frac{3d}{4}$.

El defecto de cada caja de rango 1 es ± 1 que no es mayor que $\frac{3d}{4}$. Entonces debe ser menor que $\frac{d}{4}$. Por lo tanto, el defecto de cada caja de rango 2 es menor que $\frac{d}{2}$, lo que significa que también es menor que $\frac{d}{4}$. Continuando con un razonamiento similar, obtendremos que incluso el defecto de la caja más grande es menor que $\frac{d}{2}$. Esto lleva a una contradicción.

$\square$

Problema 48. A los participantes de una olimpiada de matemáticas se les ofrecieron n preguntas. El jurado determina la dificultad de cada una de las preguntas como una cantidad entera positiva de puntos que los participantes obtienen por respuestas correctas a las preguntas. Por respuestas incorrectas (o parcialmente correctos) no se otorgan puntos, y todos los puntos obtenidos por el participante se suman. Cuando todos los participantes entregaron sus hojas de respuestas, resultó que el jurado puede determinar la dificultad de las preguntas de tal manera que las posiciones entre los participantes se distribuyan de cualquier manera previamente establecida. ¿Cuál es el número máximo de participantes que podría haber sido?

Solución. Demostraremos que con n participantes, tal distribución de puntos es posible. El ejemplo es evidente: supongamos que el k-ésimo participante solo responde una pregunta, la k-ésima. Luego, asignando valores a las preguntas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, ..., n\}$, el jurado colocará al k-ésimo participante en el lugar $n + 1 - a_k$.

Ahora, supongamos que hay $n+1$ participantes. Imaginemos que hemos clonado a cada participante, es decir, tenemos un número ilimitado de participantes de cada uno de los $n+1$ tipos (dentro de cada tipo, todos responden las preguntas de la misma manera). Demostraremos que se pueden formar dos equipos diferentes (al menos para un tipo, el número de participantes de ese tipo en el primer equipo no es igual al número de participantes de ese tipo en el segundo equipo), pero con los mismos resultados (es decir, para cada pregunta, el mismo número de personas responde en ambos equipos).

En efecto, escribamos un sistema de ecuaciones lineales, donde la i-ésima ecuación establece que la diferencia entre el número de participantes del primer equipo y el segundo equipo que respondieron la i-ésima pregunta es igual a cero. Aquí, x_j es el número de participantes del tipo j (en el primer equipo si x_j es positivo, en el segundo equipo si es negativo). Los coeficientes son ceros y unos, que dependen de si el participante del tipo j respondió o no la i-ésima pregunta. Este es un sistema de n ecuaciones homogéneas con $n + 1$ incógnitas. Como se sabe, tiene una solución no nula, y dado que todos los coeficientes son racionales, existe una solución no nula racional. Multiplicamos esta solución de manera que todos los valores de x_j sean enteros. Hemos encontrado los equipos requeridos. En este caso, los participantes de cada tipo están presentes en no más de un equipo.

Supongamos que el primer equipo tiene al menos tantos participantes como el segundo. Entonces, no es posible asignar puntos a las preguntas de manera que las posiciones de todos los participantes del primer equipo sean mejores que las posiciones de los participantes del segundo equipo, porque la suma de los puntos de los participantes del primer equipo siempre será igual a la suma de los puntos de los participantes del segundo equipo.

$\square$

Problema 49. La tabla triangular se construye siguiendo la siguiente regla: en la parte superior de la tabla, se escribe un único número natural $a > 1$, y luego, debajo de cada número k, escribimos a la izquierda el número k^2 y a la derecha el número $k + 1$. Demuestra que en cada fila de la tabla todos los números son diferentes.

Por ejemplo, cuando $a = 2$, la segunda fila consiste en los números 4 y 3, la tercera fila en los números 16, 5, 9 y 4, la cuarta fila en los números 256,17, 25, 6, 81, 10, 16 y 5.

Solución. Supongamos que en algunas filas de la tabla aparecen números iguales. Sea n el número de la fila más alta en la que se encuentran estos números iguales, y p y q son los números iguales en la fila con el número n. Dado que en la fila anterior no hay números iguales, p y q se obtienen de la fila anterior mediante acciones diferentes: uno mediante el cuadrado y el otro mediante la adición de 1. Supongamos que $p = r^2$ y $q = s + 1$, de modo que $s = r^2 - 1$. Los números r y s se encuentran en la fila $n - 1$.

Ahora consideremos el camino mediante el cual se obtiene el número s a partir del número a. Supongamos que en este camino se realizan elevaciones al cuadrado. Dado que $s < r^2$, el número más grande que se elevó al cuadrado en el camino podría ser $r - 1$. Pero $s - (r - 1)^2 = 2r - 2$. Esto significa que el número s se puede obtener a partir del número $(r - 1)^2$ agregando solamente 1, y se necesitan $2r - 2$ pasos para hacerlo. Por lo tanto, el número s se obtuvo a partir del número a en al menos $2r - 1$ pasos, lo que implica que $n - 2 \geq 2r - 1$. Sin embargo, todos los números que se obtienen a partir del número a en tal cantidad de pasos son mayores o iguales a $a + 2r - 1$, mientras que el número r, que se encuentra en la misma fila que s, se obtuvo a partir de a en la misma cantidad de pasos que s.

Por lo tanto, al obtener el número s a partir de a, no hubo ninguna elevación al cuadrado. Esto también se aplica al número $q = s + 1$. Por lo tanto, q es el número más a la derecha en su fila, lo que contradice la igualdad $q = p$. $\square$