PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÀTICAS

Fecha: 6, 20, 27 de octubre y 3 de noviembre de 2023.

Manejando con las letras[1]

En este tema vamos a demostrar hechos matemáticos mediante transformaciones de letras y usarlas también para resolver problemas que son difíciles de resolver sin estas manipulaciones. Empecemos con el siguiente ejemplo.

Problema 1. Piensa en un número. Suma 2 a ese número. Multiplica el resultado por 4. Resta 6 al resultado. Divide el resultado por 2. Resta el número original al resultado. Luego, resta el número original nuevamente. ¿Qué te ha salido? Compara el resultado con los de tus compañeros. ¿Por qué os ha salido el mismo número?

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo resuelto.

a) En la pizarra, se escriben en fila cien números: $3, 7, \ldots$ y cada número, comenzando desde el segundo, es igual a la suma de los dos números vecinos. Encuentra el centésimo número.

b) En la pizarra, se escriben en fila cien números: $3, \ldots$ y cada número, comenzando desde el segundo, es igual a la suma de los dos números vecinos. Encuentra el centésimo número.

Solución. a) Escribamos los primeros números: $3, 7, 4, -3, -7, -4, 3, 7, \ldots$. Observemos cuidadosamente y veremos un bloque repetitivo de seis números. $3, 7, 4, -3, -7, -4$. Notaremos que cada número, comenzando desde el tercero, es igual a la diferencia entre los dos anteriores, es decir, se determina de manera única por los dos números anteriores. Por lo tanto, este bloque se repetirá. ¿Qué posición ocupa el centésimo número en el bloque? $100 = 6 \cdot 16 + 4$, lo que significa que es el cuarto número en el bloque, es decir, -3. Respuesta: -3.

b) Hay una sospecha de que la respuesta no depende del segundo número (esto se puede verificar con el ejemplo de 3, 5 u otro número). Demostremos esto: llamemos al segundo número k y escribamos los primeros números: $3, k, k-3, -3, -k, -k+3, 3, k, \cdots$. Vemos que hay un período de seis números $3, k, k-3, -3, -k, -k+3$, similar a la parte a). Entonces la repuesta es también -3. $\square$

El esquema de nuestro razonamiento puede ser resumido en los siguientes pasos:

1. Sospechamos (observamos en varios ejemplos) que el resultado no depende de los datos de entrada.
2. Los datos representamos con letras y demostramos nuestra conjetura.

Problema 2. En la pizarra, se escriben en fila cien números diferentes de cero. Se sabe que cada uno de ellos, excepto el primero y el último, es el producto de dos números vecinos. El primer número es igual a 7. ¿Qué número está escrito al final?

[1] En la preparación de esta hoja hemos usado el artículo de A.I. Sgibnev, ¿Para qué sirven las letras?

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo resuelto. Pedro caminó durante 5 horas, primero en una carretera horizontal, luego subió una montaña y luego regresó al punto de partida por el mismo camino. La velocidad de Pedro fue de 4 km/h en la carretera horizontal, 3 km/h al subir la montaña y 6 km/h al bajar de la montaña.

a) ¿Es posible encontrar la distancia recorrida por Pedro?

b) ¿Es posible encontrar la longitud de la carretera horizontal?

Solución. Al principio, parece que no tenemos suficiente información, ya que no sabemos cuánto tiempo duró la subida, la bajada y la caminata en la carretera plana. Pero no nos apresuremos y usemos letras. Denotemos la longitud de la carretera plana como a y la longitud de la subida (que es igual a la longitud de la bajada) como b. Entonces necesitamos encontrar $2a + 2b$. Al mismo tiempo, el tiempo total de movimiento es igual a $\frac{2a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{b}{6} = 5$. De aquí obtenemos $\frac{a+b}{2} = 5$. Por lo tanto, $2a + 2b$ es igual a 20. Sin embargo, no podemos encontrar a y b por separado. $\square$

Observación. Las velocidades en el ejemplo anterior se seleccionaron específicamente de manera que tengamos suficiente información para el punto a). Si tomamos, por ejemplo, velocidades de 4, 3 y 5 km/h respectivamente, no podríamos encontrar $a + b$.

Problema 3. Un abuelo y su nieto fueron a esquiar juntos. La abuela sabe que en terreno plano ambos van a una velocidad de 7 km/h, cuesta abajo el abuelo va a 8 km/h y el nieto a 20 km/h, cuesta arriba el abuelo va a 6 km/h y el nieto a 4 km/h. Ambos recorrieron la misma ruta. ¿Puede la abuela determinar si la distancia de las bajadas es mayor que la de las subidas en su camino si el primero en regresar fue:

a) el nieto,

b) el abuelo?

Ejemplo resuelto. Demuestra el siguiente método para obtener triángulos rectángulos.

Pitágoras eligió un número impar como la longitud del cateto más pequeño. Luego elevó este número al cuadrado, restó uno y utilizó la mitad de esa diferencia como la longitud del segundo cateto. Finalmente, sumó uno a esta longitud para obtener la hipotenusa.

Solución. Denotemos el primer cateto como $2n - 1$. Luego, el segundo cateto es igual a: $\frac{(2n-1)^2-1}{2}$ y la hipotenusa es igual a $\frac{(2n-1)^2+1}{2}$. Como

$$(2n-1)^2 + \left(\frac{(2n-1)^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n-1)^2+1}{2}\right)^2,$$

este triangulo es rectángulo. $\square$

El método de introducir letras permite resolver clases de problemas aún más amplias, si consideramos la reducción de problemas no solo a ecuaciones, sino también a desigualdades (Ejercicio 3), identidades (el ejemplo anterior), funciones, y así sucesivamente. En este caso, la técnica de reducción es la misma.

1. Introducimos letras.

2. Formamos expresiones.

3. A partir de las expresiones, formamos:

   - una ecuación (problema de encontrar algo)
   - una desigualdad
   - una identidad (problema de demostrar una afirmación)
   - una función (problema de optimización) ...

4. Resolvemos la ecuación/desigualdad (demostramos la identidad, investigamos la función).

5. Damos la respuesta en términos del problema original.

Problema 4. Tenemos 100 números racionales. Nos dicen que si se le suma 1 a cada uno de ellos, la suma de sus cuadrados no cambia. Aumentamos otra vez cada número en 1. ¿Cambiará esta vez la suma de los cuadrados y, de ser así, en cuánto?

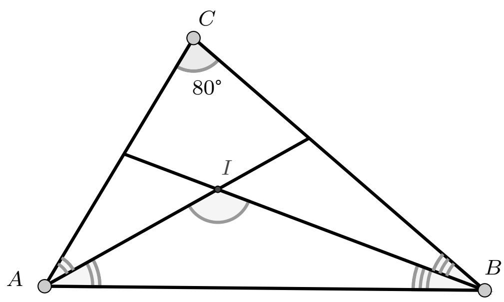
Nota. ¿Cómo es posible que la suma de los cuadrados no cambie si los números aumentan? Es muy sencillo: aumentamos el número $-\frac{1}{2}$ en 1. El resultado es el número $\frac{1}{2}$ y el cuadrado sigue siendo igual a $\frac{1}{4}$. Así que, puedes tomar $-\frac{1}{2}$ cien veces.

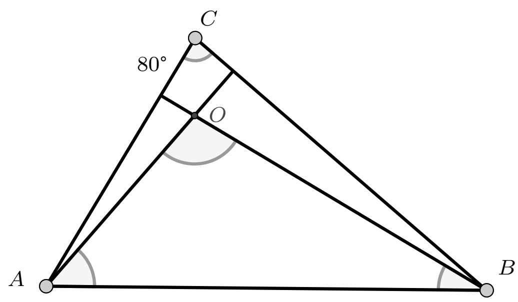
Hay muchos problemas de geometría que requieren conocimientos geométricos mínimos para resolverlos (definiciones de bisectriz, punto medio, magnitud de un ángulo, suma de los ángulos de un triángulo) más el arte de trabajar con las letras.

Ejemplo resuelto. En el triángulo ABC, el ángulo $\angle C$ mide $80°$. Encuentra el ángulo

a) entre las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$,

b) entre las altitudes dibujadas hacia los lados AC y BC.





Solución. a) Denotemos por I el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$. Queremos encontrar $\angle AIB$.

Sea $\alpha = \angle CAB$ y $\beta = \angle ABC$. Entonces $180° = 80° + \alpha + \beta$ y por lo tanto $\alpha + \beta = 100°$.

Como AI es la bisectriz del angulo $\angle CAB$, $\angle IAB = \frac{\alpha}{2}$. De la misma forma, $\angle ABI = \frac{\beta}{2}$. Por lo tanto

$$\angle AIB = 180° - (\angle IAB + \angle ABI) = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 130°.$$

b) Denotemos por O el punto de intersección de las altitudes dibujadas hacia los lados AC y BC. Queremos encontrar $\angle AOB$.

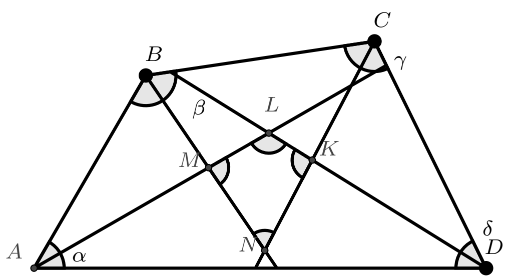
Sea $\alpha = \angle CAB$ y $\beta = \angle ABC$. Entonces como en a) $\alpha + \beta = 100°$.

Como la recta AO es perpendicular a la recta CB, $\angle BAO = 90° - \angle ACB = 10°$. Por lo tanto, $\angle OAB = \alpha - 10°$. De la misma forma, $\angle ABO = \beta - 10°$. Por lo tanto

$$\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle ABO) = 180° - (\alpha - 10° + \beta - 10°) = 200 - (\alpha + \beta) = 100°.$$

□

Problema 5. En un cuadrilátero convexo se dibujan las bisectrices de los ángulos interiores. Demuestra que la suma de dos ángulos opuestos del cuadrilátero obtenidos por su intersección es $180°$.



Ayuda: Denota los ángulos del cuadrilátero en el sentido de las agujas del reloj por $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$. Expresa los dos ángulos opuestos del nuevo cuadrilátero en términos de $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$, encuentra la suma de estos dos ángulos y simplifica la expresión.

Resumamos lo que hemos visto en esta introducción. Las habilidades claves para la resolución de varios tipos de problemas matemáticos son las siguientes:

- introducir letras,
- inventar expresiones a partir de letras,
- combinar ecuaciones, desigualdades, identidades, funciones a partir de expresiones.

Una **progresión aritmética** es una secuencia de números (naturales, enteros o reales), donde cada miembro, a partir del segundo, se obtiene sumándole una cantidad fija d al miembro anterior. Si el primer término de la progresión es a_1, entonces para números naturales $n > 1$, se cumple la igualdad $a_n = a_{n-1} + d$. La fórmula que expresa el término n-ésimo de la secuencia en términos de uno o varios términos anteriores se llama fórmula recurrente.

Por inducción, a partir de la fórmula recurrente mencionada anteriormente, obtenemos la fórmula para el n-ésimo término de la progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)d$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, y representamos la progresión de la siguiente manera:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, \ldots.$$

La cantidad d se llama la **diferencia** de la progresión, o el **paso** de la progresión. Una progresión aritmética con $d > 0$ aumenta estrictamente de manera monótona, con $d < 0$ disminuye estrictamente de manera monótona, y con $d = 0$ permanece constante. Por ejemplo, la secuencia de números naturales $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ es una progresión aritmética con el primer término y la diferencia iguales a 1.

Denoteremos por $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ la suma de los primeros n términos de la progresión a_n. El símbolo de suma $\sum$ fue introducido en el siglo XVIII por Leonhard Euler. En el futuro, nos encontraremos también con el símbolo $\prod$, que en el siglo XIX Carl Gauss comenzó a usar para representar el producto de un conjunto de variables indexadas

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Ejemplo resuelto. Encuentra la fórmula para S_n para una progresión aritmética con el paso d.

Solución. Escribimos la suma de los primeros n términos de la progresión en orden creciente de los índices, y luego la misma suma en orden decreciente de los índices, y sumamos las cantidades que caen en la misma columna.

$$\begin{array}{llllll}
S_n = & a_1 + & a_2 + & \ldots & +a_{n-1} & +a_n \\
S_n = & a_n + & a_{n-1} + & \ldots & +a_2 & +a_1 \\
\hline
2S_n = & a_1 + a_n & +a_{n-1} + a_2 & \ldots & +a_{n-1} + a_2 & +a_n + a_1
\end{array}$$

Observemos que $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = 2a_1 + d(n-1)$. Por lo tanto

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1)).$$

$\square$

Problema 6. Calcula $1 + \ldots + 100$.

Una progresión **geométrica** es una secuencia de números (naturales, enteraos, reales), donde cada miembro, a partir del segundo, se obtiene multiplicando el miembro anterior por un multiplicador fijo q: si el primer término de la progresión es b_1, entonces para números naturales $n > 1$, se cumple la igualdad $b_n = b_{n-1} \cdot q$. De aquí, $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$, ..., $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. La magnitud q se llama el **razón** de la progresión geométrica. La progresión está completamente determinada por los valores de b_1 y q.

Problema 7. Encuentra la fórmula para la suma S_n de los primeros n términos de una progresión geométrica con el razón q.

Muchos (pero no todos) de los siguientes ejercicios se resuelven usando las letras

---

Problema 8.

1. Si subo los escalones de 3 en 3 doy 30 pasos menos que si los subo de 2 en 2. ¿Cuántos pasos necesita un gigante que los suba de 10 en 10?
2. Si subo los escalones de 3 en 3 doy p pasos menos que si los subo de 2 en 2. ¿Cuántos pasos necesita un gigante que los suba de 10 en 10? ¿De qué tiene que ser múltiplo p para que el gigante los suba sin que le sobren escalones?

Problema 9. Olas gigantes, vientos fortísimos y una isla misteriosa: el naufragio ha sido inevitable. Los piratas del barco hacen recuento y ven que sólo tienen 27 quesos para sobrevivir. El primer día se reparten un queso para cada cuatro, el segundo día se reparten un queso para cada cinco, y observan con tristeza que ya no tienen más víveres. La tragedia los acecha... ¿Cuántos piratas son?

Problema 10. Hay 100 números escritos en la pizarra, y su media es 86. Borramos 20 números y la media de los números que quedan es 84. ¿Cuál es la media de los números borrados?

Problema 11.

1. Si $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c} = \frac{8}{5}$, ¿cuánto vale $\frac{a}{b+c}$?
2. Si $\frac{a}{b} = x$ y $\frac{b}{c} = y$, ¿cuál es una fórmula que da el valor de $\frac{a}{b+c}$ en función de x e y?

Problema 12.

1. En una caja hay bolas verdes, amarillas y rojas. Si sacamos una bola al azar, es igual de probable que sea verde o amarilla, y la probabilidad de que sea amarilla es el doble que de que sea roja. Si hay 40 bolas en total, ¿Cuántas bolas son rojas?
2. En una caja hay bolas verdes, amarillas y rojas. Si sacamos una bola al azar, que sea verde es x veces más probable que que sea amarilla, y que sea amarilla es y veces más probable que que sea roja. Si hay B bolas, ¿cuántas son rojas? ¿De qué tiene que ser múltiplo el número B para que esto sea posible?

Problema 13. Hay una bolsa con más de 10 nueces. Cada minuto se le acerca un robot. Si hay un número par de nueces en la bolsa, el robot toma la mitad. Y si es impar, añade tantas como hay en la bolsa, más dos nueces más. ¿Es posible que al cabo de tres minutos haya más nueces en la bolsa que al principio?

Problema 14. Desde un punto de una hoja de papel se dibujaron cuatro rayos, dividiendo la hoja en cuatro partes. Luego se trazaron las bisectrices de los cuatro ángulos formados por los rayos. Estas cuatro bisectrices delimitan a su vez cuatro ángulos y dividen la hoja en cuatro partes. Demuestra que dos de estos ángulos delimitados por bisectrices suman 180°, al igual que los otros dos.

Problema 15. En un examen, cada uno de los 25 alumnos recibió una de las calificaciones "8", "9" o "10". ¿Cuántas 10 más que 8 hubo si la suma de todas las calificaciones es 231?

Problema 16. Para su cumpleaños a Bruno le regalaron 777 caramelos . Bruno quiere comer todos los caramelos en n días, de tal manera que cada uno de estos días (excepto el primero, pero incluyendo el último) coma un caramelo más que el día anterior. ¿Cuál es el máximo valor de número n para el que esto es posible?

Problema 17. Sean a, b, u, v numeros enteros. Demuestra la igualdad

$$(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = (au + bv)^2 + (av - bu)^2.$$

Problema 18. Los números naturales se dividen en n progresiones aritméticas de tal forma que cada número natural pertenece exactamente a una de estas n progresiones. Sean d_1, d_2, ..., d_n las diferencias de estas progresiones. Demuestra que $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} = 1$.

Problema 19. Ocho amigos (**A**na, **B**runo, **C**lara, **D**iego, **E**lena, **F**ernando, **G**ala y **H**ugo) compraron entradas nominales para el cine en la misma fila, todos seguidos. Al llegar al cine, se sentaron en esos ocho sitios, pero no en el orden que les correspondía, de esta manera:

- Bruno se sentó en el sitio que le correspondía.
- Clara se sentó dos butacas a la derecha de la que le correspondía a Gala.
- Diego se sentó una butaca a la izquierda de la que le correspondía a Fernando.
- Elena se sentó cuatro butacas a la izquierda de la que le correspondía a Hugo.
- Fernando se sentó cinco butacas a la derecha de la que le correspondía a Diego.
- Gala se sentó una butaca a la derecha de la que le correspondía a Elena.
- Hugo se sentó tres butacas a la izquierda de la que le correspondía a Ana.

¿A quién pertenecía el sitio en el que se sentó Ana?

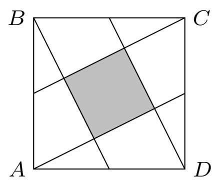
Problema 20. Los números naturales se dividen en varias (un número finito) progresiones aritméticas. Demuestra que al menos una de estas progresiones tiene su primer término divisible por su diferencia.

Problema 21. En un triángulo ABC, $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ y $\angle C = 70°$. Un rayo de luz va desde un punto D en el lado BC a un punto E del lado CA, rebota en el lado CA, va al punto F en el lado AB, rebota en el lado AB y vuelve al punto D. Encuentra los ángulos del triángulo DEF.

Pista: Ten en cuenta que como la luz siempre toma el camino más corto entre dos puntos, siempre llega y sale de un lado del triángulo con el mismo ángulo.

Problema 22. Un castillo tiene infinitas habitaciones, numeradas por 1, 2, 3, ... El castillo consta de diferentes pasillos, y cada habitación está en un solo pasillo. Sabemos que para todo número entero positivo n, la habitación n está en el mismo pasillo que la habitación $3n + 1$ y que la habitación $n + 10$. Determina el número máximo de pasillos que puede tener el castillo.

Problema 23. El cuadrado $ABCD$ tiene área 1 m^2. Unimos cada vértice con el punto medio de un lado, como en la figura, y nos queda otro cuadrado dentro. ¿Cuál es su área?



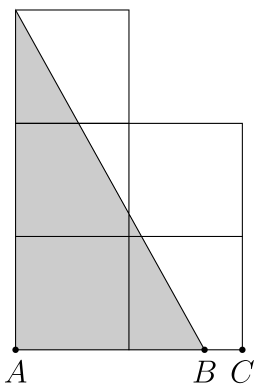
Problema 24. Tienes varias pesas cuya masa total es igual a 1 kg. A cada pesa se le asigna un número: $1, 2, 3, \ldots$. Demuestra que existe un número n tal que la masa de la pesa con el número n es estrictamente mayor que $\frac{1}{2^n}$ kg.

Problema 25. Los números a, b y c son distintos de cero y se cumplen las igualdades: $a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1$. Demuestra que $ab + bc + ca = 0$.

Problema 26. Demuestra que si el producto de tres números positivos es igual a 1 y la suma de estos números es estrictamente mayor que la suma de sus inversos, entonces exactamente uno de estos números es mayor que 1.

Problema 27. ¿Es posible encontrar diez números naturales consecutivos de manera que la suma de sus cuadrados sea igual a la suma de los cuadrados de los nueve números naturales consecutivos que les siguen?

Problema 28. En la siguiente imagen se muestra una figura geométrica formada por cinco cuadrados congruentes (es decir, cuyos lados miden lo mismo) y un triángulo sombreado dentro de ella. Si el área del triángulo sombreado coincide con la de fuera del triángulo sombreado, halla la proporción $\frac{|AB|}{|BC|}$.



Problema 29. Demuestra que cualquier número entero se puede expresar como la suma de los cubos de cinco números enteros. Por ejemplo,

$$52 = 4^3 + (-3)^3 + 2^3 + 2^3 + (-1)^3.$$

Ayuda: Demuestra que cada número divisible por 6 se puede expresar como suma de 4 cubos.

Problema 30. En la circunferencia se colocan n números, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uno de los cuales es igual a 1 o -1. Además, la suma de los productos de números adyacentes es igual a cero, y en general, para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, la suma de los productos de números que están separados por k lugares es igual a cero (es decir,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = 0, x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2 = 0, x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3 = 0,$$

y así sucesivamente. (Por ejemplo, para $n = 4$, uno de los números puede ser -1 y los otros tres pueden ser 1).

Demuestra que n tiene forma $n = 4k^2$ para algún número natural k.

Problema 31. Dada una progresión geométrica con una razón que es un número entero distinto de 0 y -1, demuestra que la suma de cualquier número de sus términos seleccionados al azar no puede ser igual a ninguno de los términos de esta progresión.

Problema 32. La suma de los módulos de los términos de una progresión aritmética finita es igual a 100. Si todos sus términos se incrementan en 1 o si todos sus términos se incrementan en 2, en ambos casos, la suma de los módulos de los términos de la nueva progresión sigue siendo igual a 100. ¿Qué valores puede tomar la magnitud n^2d bajo estas condiciones, donde d es la diferencia de la progresión y n es el número de términos?

Problema 33. Se considera la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. ¿Existe una progresión aritmética

a) de longitud 5;

b) de longitud arbitrariamente grande,

compuesta por términos de esta secuencia?.

Problema 34. En un triángulo rectángulo ABC con catetos AC y BC e hipotenusa AB, se dibuja la altura CO hasta la hipotenusa. Demuestra que $|AC| + |BC| \leq |AB| + |CO|$.

Problema 35. Un polígono convexo de n lados tiene todas sus diagonales dibujadas y no hay tres diagonales que se corten en un punto del interior del polígono. Encuentra una fórmula para el número de regiones formadas dentro del polígono.

Problema 36. Probar que si en un triángulo de área s el producto de dos medianas es $3s/2$ entonces esas dos medianas son perpendiculares.

Problema 37. Un número natural se incrementó en un 10% y nuevamente obtuvimos un número natural. ¿Podría la suma de los números disminuir exactamente un 10%?

Problema 38. En un campo de fútbol hay tres balones no alineados. En cada turno, le damos una patada a uno cualquiera de ellos de manera que el balón pase por el punto medio entre los otros dos (y que avance más allá del punto medio). Determina si es posible que tras 2023 turnos los balones vuelvan a su posición original.

Problema 39. A cada pareja de números entero x e y corresponde un determinado número $x \maltese y$. Encuentra $2023 \maltese 2024$ si se sabe que para tres números cualesquiera x, y, z se cumplen las siguientes identidades: $x \maltese x = 0$ y $x \maltese (y \maltese z) = (x \maltese y) + z$.

Problema 40. Demuestra que hay un número infinito de tripletas de números naturales a, b, c para los cuales se cumple la igualdad $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Problema 41. Formamos una secuencia de longitud n sin repetición a partir de los números naturales del 1 al n. Decimos que la secuencia es mala si se puede seleccionar 10 números (no necesariamente adyacentes) que están en orden descendente. Las demás secuencias se consideran buenas. Demuestra que la cantidad de secuencias buenas no supera 81^n.