2023 PIM 2024

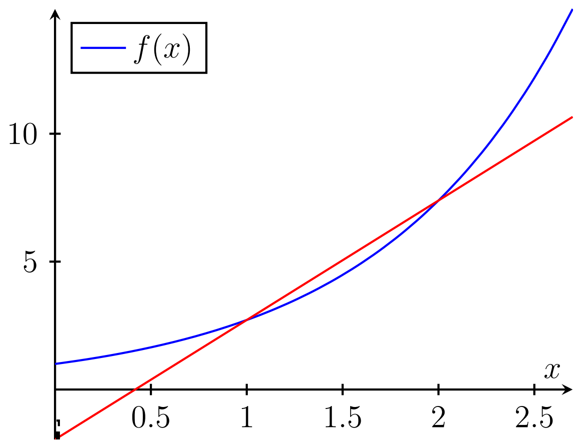
PEQUEÑO INSTITUTO DE MATEMÀTICAS

2023 PIM 2024

Fecha: 6, 20, 27 de octubre y 3 de noviembre de 2023.

Desigualdades

Una función es **convexa** en su dominio si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su gráfica está por encima de la gráfica de la función en ese intervalo. Intuitivamente, las funciones son convexas si su gráfica tiene forma de $\cup$.



Sean dos números reales a, b con $a < b$. La recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Por tanto, una función $f(x)$ es convexa en un intervalo I si para todo a, b en I con $a < b$ tenemos que para todo x en el intervalo $[a, b]$ se cumple que $g(x) \geq f(x)$, es decir, se cumple que

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq f(x). \tag{1}$$

Además, decimos que una función es **estrictamente convexa** en un intervalo I si para todo a, b en I con $a < b$ se cumple que

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) > f(x)$$

para todo x tal que $a < x < b$.

Manipulando estas desigualdades, obtenemos lo siguiente.

Primera caracterización de convexidad: La función $f(x)$ es **convexa** en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

para todo x en el intervalo $[a, b]$.
$f(x)$ es además **estrictamente convexa** en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

para todo x en el intervalo (a, b).

Problema 1. Sea n un número entero positivo.

a) Demuestra que para todo par de números reales y, z se tiene que

$$y^n - z^n = (y-z)\left(\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j\right),$$

donde $\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j = y^{n-1} + y^{n-2}z + \ldots yz^{n-2} + z^{n-1}$.

b) Usa la parte a) para demostrar que $f(x) = x^n$ es una función convexa en el intervalo $(0, \infty)$, y estrictamente convexa si $n > 1$.

Solución. a)

$$(y-z)\left(\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j\right) = y\left(\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j\right) - z\left(\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} y^{n-j} z^j - \sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} y^{n-j} z^j - \sum_{j=1}^{n} y^{n-j} z^j = y^n - z^n$$

b) Sean a, b números reales, con $0 < a < b$. Tenemos que demostrar que para todo x en el intervalo $[a, b]$,

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} \geq \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

Si $n = 1$ se da la igualdad, por lo que es cierto. Supongamos que $n > 1$, y en ese caso queremos demostrar que

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} \geq \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

para todo x en el intervalo (a, b). Por la parte a), la desigualdad anterior es equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n-1} b^{n-1-j} a^j > \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} a^j,$$

que a su vez equivale a

$$\sum_{j=0}^{n-1} (b^{n-1-j} - x^{n-1-j}) a^j > 0 \qquad (2)$$

Si $0 < a < x < b$ tenemos que $b^{n-1-j} > x^{n-1-j}$ y que $a^j > 0$ para todo $0 \leq j \leq n-1$, por lo que $\sum_{j=0}^{n-1}(b^{n-1-j} - x^{n-1-j})a^j$ es una suma de sumandos > 0. Por tanto, la desigualdad (2) cierta para todo x en el intervalo (a, b), que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

Conviene recordar los siguientes ejemplos de funciones convexas, aunque no veamos la demostración de que lo son.

Ejemplos: Las siguientes funciones son convexas en los dominios indicados.

- $f(x) = x^c$ en el intervalo $(0, \infty)$ para todo $c \geq 1$, y estrictamente convexa si $c > 1$.
- $f(x) = x^{2n}$ es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}$ para todo número entero $n \geq 1$.
- $f(x) = c^x$ es estrictamente convexa en todo su dominio ($\mathbb{R}$) para todo $c > 0$.

Veamos una definición equivalente de función convexa. Todo número x en el intervalo $[a, b]$ se puede escribir como $x = (1 - t)a + tb$ para un único valor de t en $[0, 1]$. Por ejemplo, para $t = 0$ obtenemos que $x = a$, para $t = 1$ obtenemos que $x = b$, y al ir aumentando el valor de t desde 0 a 1 vamos recorriendo el intervalo $[a, b]$ desde a hasta b. Por tanto, sustituyendo $x = (1 - t)a + tb$ en la desigualdad (1) nos da la siguiente caracterización equivalente de convexidad.

Segunda caracterización de convexidad: La función $f(x)$ es convexa en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$(1 - t)f(a) + tf(b) \geq f((1 - t)a + tb)$$

para todo t en el intervalo $[0, 1]$.
$f(x)$ es además **estrictamente convexa** en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$(1 - t)f(a) + tf(b) > f((1 - t)a + tb)$$

para todo t en el intervalo $(0, 1)$.

Veamos una desigualdad muy general y muy importante de la que deduciremos el resto de desigualdades que van a aparecer en esta hoja.

Desigualdad de Jensen: Sea $n \geq 1$, sea $f(x)$ una función convexa en un intervalo I, sean $x_1, \ldots, x_n$ en I, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Entonces,

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n).$$

Además, si $f(x)$ es estrictamente convexa en I, y $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se da la igualdad en la desigualdad de Jensen si y solo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Problema 2. Demuestra que si $x_1, \ldots, x_n$ están en el intervalo I y si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ son tales que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ está en el intervalo I.

Problema 3. A partir de la segunda caracterización de convexidad, demuestra la desigualdad de Jensen en los casos $n = 1$ y $n = 2$, incluida la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad.

Solución. Para $n = 1$, $\lambda_1 = 1$ y la desigualdad de Jensen nos dice que $f(x_1) \geq f(x_1)$ que es verdad, y se da la igualdad como nos dice el enunciado que se da. Para $n = 2$, llamando $t = \lambda_2$ obtenemos que $\lambda_1 = 1 - t$, y la desigualdad de Jensen equivale a la segunda caracterización de convexidad.

Supongamos que $f(x)$ es estrictamente convexa. Si $x_1 = x_2$ siempre tenemos igualdad. Si $x_1 \neq x_2$, la segunda caracterización de estrictamente convexa nos dice que la igualdad en la desigualdad de Jensen sólo se puede dar si $t = 0$ o $t = 1$, que equivale a que alguno de los λ_i's sean 0. $\square$

Ejemplo resuelto. Demuestra la desigualdad de Jensen para cualquier número $n \geq 2$ de sumandos, incluyendo la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad.

Solución. Si hemos hecho el ejercicio anterior, sólo nos queda demostrar la desigualdad de Jensen para n sumandos, con $n \geq 3$.

Supongamos que la desigualdad de Jensen es cierta para un valor de n concreto, con $n \geq 2$. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ en I y sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1} \geq 0$. Entonces,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Como $(1 - \lambda_{n+1}) + \lambda_{n+1} = 1$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen para dos sumandos y obtenemos que

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = \\
&= f\left((1-\lambda_{n+1}) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Además, si $0 < \lambda_{n+1} < 1$ y $f(x)$ es estrictamente convexa en I, la igualdad se obtiene si y solo si

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n = x_{n+1}$$

Vemos que $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$, por lo que por la desigualdad de Jensen para n sumandos,

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} f(x_2) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Además, si $0 < \lambda_i < 1$ para todo i y $f(x)$ es estrictamente convexa, la igualdad se da si y solo si

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

Juntando las dos cadenas de desigualdades, obtenemos la desigualdad de Jensen para $n+1$ sumandos, así como la parte del enunciado referente a cuándo se da la igualdad, ya que si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, entonces $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n = x_1 \cdot \frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = x_1$. Así, a partir de la desigualdad de Jensen para la de 2 sumandos podemos obtener la de 3 sumandos, a partir de esa la de 4, etc. Por tanto, la desigualdad de Jensen es cierta para cualquier número $n \geq 1$ de sumandos. □

Desigualdad de las medias aritmética y geométrica: Sea $n \geq 1$, y sean $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Entonces,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Además, la igualdad ocurre si y sólo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Problema 4. Demuestra la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a partir de la desigualdad de Jensen, incluida la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad. **Ayuda:** Llama y_j a $\sqrt[n]{x_j}$ para todo $j = 1, \ldots, n$ y reescribe la desigualdad de las medias aritmética y geométrica en términos de los y_j.

Desigualdad de las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática (enunciadas en orden de aparición): Sea $n \geq 1$, y sean $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Entonces,

$$0 < \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Además, los $\leq$ son una igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Problema 5. Demuestra todas las desigualdades del recuadro anterior (menos la de las medias aritmética y geométrica, que ya la has demostrado), incluida la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad. Para ello, usa las desigualdades de Jensen y la de las medias aritmética y geométrica.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Sea $n \geq 1$, y sean $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos secuencias de n números reales. Entonces,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Además, la igualdad ocurre si y sólo si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son proporcionales, es decir, si existe un número real λ tal que $a_i = \lambda b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, o tal que $b_i = \lambda a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo resuelto. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz a partir de la desigualdad de Jensen.

Solución. Supongamos que $b_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Sea $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$.

Notemos que $\frac{b_i^2}{B^2} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y que $\frac{b_1^2}{B^2} + \frac{b_2^2}{B^2} + \ldots + \frac{b_n^2}{B^2} = 1$. Aplicando la desigualdad de Jensen a la función $f(x) = x^2$, que es estrictamente convexa en todo su dominio ($\mathbb{R}$), obtenemos que

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\frac{b_1^2}{B^2} + \frac{a_2}{b_2}\frac{b_2^2}{B^2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n^2}{B^2}\right)^2 \leq \frac{b_1^2}{B^2}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \frac{b_2^2}{B^2}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 + \ldots + \frac{b_n^2}{B^2}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

y la igualdad se da si y solo si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, es decir, si y solo si $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2 \ldots, b_n)$ son proporcionales.

Simplificamos la desigualdad obtenida y deducimos que

$$\left(\frac{a_1b_1}{B^2} + \frac{a_2b_2}{B^2} + \ldots + \frac{a_nb_n}{B^2}\right)^2 \leq \frac{1}{B^2}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right),$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene multiplicando ambos lados de la desigualdad por $B^2 > 0$.

Ahora, si alguno de los b_i son 0, podemos suponer reordenando que son los k primeros. Si $k = n$ el resultado es inmediato. Si no, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $n - k$ sumandos con todos los $b_i \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 &= (a_{k+1}b_{k+1} + a_{k+2}b_{k+2} + \ldots + a_nb_n)^2 \\ &\leq (a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \ldots + b_n^2),\end{aligned}$$

donde la igualdad se da si y solo si $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n)$ y $(b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n)$ son proporcionales. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}(a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \ldots + b_n^2) &= (a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2),\end{aligned}$$

donde la igualdad se da si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$. Juntando todo, obtenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y que la desigualdad se obtiene si y solo si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son proporcionales. $\square$

Problema 6. Sean $a, b, c \geq 0$. Demuestra que

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ac}.$$

Solución. Observemos que

$$\frac{ab + ca}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ca} = a\sqrt{bc}.$$

De la misma forma
$$\frac{bc+ca}{2} \geq c\sqrt{ab}, \frac{ab+bc}{2} \geq b\sqrt{cb}.$$
Por lo tanto
$$ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ac}.$$
$\square$

Problema 7. Sean a, b, u, v numeros enteros. Demuestra la igualdad
$$(a^2+b^2)(u^2+v^2) = (au+bv)^2+(av–bu)^2.$$

Solución.
$$(a^2+b^2)(u^2+v^2) = a^2u^2+b^2u^2+a^2v^2+b^2v^2 =$$
$$(a^2u^2+2abuv+b^2v2)+(b^2u^2–2abuv+a^2v^2) = (au+bv)^2+(bu–av)^2.$$
$\square$

Problema 8. Sean $a, b, c > 0$. Demuestra que
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Solución. Recordemos primero que para números positivos x, y, z se cumple la siguiente desigualdad ente las médias armónica y aritmética:
$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$
Ahora sustituimos $x = a+b$, $y = b+c$ y $z = a+c$.

$\square$

Problema 9. Los números naturales se dividen en n progresiones aritméticas de tal forma que cada número natural pertenece exactamente a una de estas n progresiones. Sean d_1, d_2, ..., d_n las diferencias de estas progresiones. Demuestra que $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_n} = 1$.

Solución. Consideremos $N = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$. Tomemos N números naturales consecutivos, el menor de los cuales es mayor que todos los primeros términos de las n progresiones. Entonces, entre estos N números, exactamente $\frac{N}{d_1}$ números pertenecen a la primera progresión, exactamente $\frac{N}{d_2}$ pertenecen a la segunda, y así sucesivamente, exactamente $\frac{N}{d_n}$ pertenecen a la n-ésima progresión. Dado que cada uno de estos N números pertenece exactamente a una de las progresiones, de aquí se deduce la igualdad necesaria.

$\square$

Problema 10. Los números naturales se dividen en varias (un número finito) progresiones aritméticas. Demuestra que al menos una de estas progresiones tiene su primer término divisible por su diferencia.

Solución. Denotemos por a_1, a_2, ..., a_n los primeros términos de las progresiones en las cuales se dividen los números naturales, y por d_1, d_2, ..., d_n sus respectivas diferencias. El producto de todas las diferencias $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$ pertenece a una de las progresiones (supongamos que es la progresión i). Esto significa que para algún número entero no negativo k se cumple la igualdad $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n = a_i + kd_i$. A partir de esta igualdad, podemos concluir que a_i es divisible por d_i.

$\square$

Problema 11. Se han colocado nueces en varias cajas. Se sabe que en promedio hay 10 nueces en cada caja, y el promedio de los cuadrados de la cantidad de nueces en las cajas es inferior a 1000. Demuestra que al menos el 10% de las cajas no están vacías

Solución. Supongamos que hay en total N cajas y solo las primeras n cajas no están vacías. Entonces, el promedio de nueces en las cajas no vacías es $10 \cdot \frac{N}{n}$. Por lo tanto, de acuerdo con la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, el promedio de los cuadrados de la cantidad de nueces en las cajas no vacías es por lo menos igual a $\left(\frac{10N}{n}\right)^2$. Por eso el promedio de los cuadrados de la cantidad de nueces en todas las cajas es por lo menos igual a

$$\frac{n}{N} \cdot \left(\frac{10N}{n}\right)^2 = \frac{100N}{n}.$$

Según la condición, este número es menor que 1000, lo que significa que $\frac{n}{N} > \frac{1}{10}$, como se pide a demostrar. $\square$

Problema 12. Los números a, b y c son distintos de cero y se cumplen las igualdades: $a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1$. Demuestra que $ab + bc + ca = 0$.

Solución. Al multiplicar ambos lados de la igualdad $a + \frac{b}{c} = 1$ por c, obtenemos $ac + b = c$, de donde $ac = c - b$. De manera similar, $ba = a - c$ y $cb = b - a$. Por lo tanto, $ab + bc + ca = (a-c) + (b-a) + (c-b) = 0$. $\square$

Problema 13. Demuestra que si el producto de tres números positivos es igual a 1 y la suma de estos números es estrictamente mayor que la suma de sus inversos, entonces exactamente uno de estos números es mayor que 1.

Solución. Supongamos que a, b y c son los números dados. Entonces,

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1 = a + b + c - 1/a - 1/b - 1/c > 0.$$

Por lo tanto, de los tres números $a-1, b-1, c-1$, exactamente dos de ellos son negativos (los tres no pueden ser positivos, ya que $abc = 1$).

$\square$

Problema 14. ¿Es posible encontrar diez números naturales consecutivos de manera que la suma de sus cuadrados sea igual a la suma de los cuadrados de los nueve números naturales consecutivos que les siguen?

Solución. Denotemos los 10 números consecutivos como $n-9, \ldots, n-1, n$. Según la condición,

$$(n-9)^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + \ldots + (n+9)^2$$

y por lo tanto obtenemos que

$$n^2 = (n+9)^2 - (n-9)^2 + \ldots + (n+1)^2 - (n-1)^2 = 2n \cdot (18 + 16 + \ldots + 2) = 180n.$$

De aquí, $n = 180$, es decir, $171^2 + \ldots + 180^2 = 181^2 + \ldots + 189^2$.

$\square$

Problema 15. Demuestra que cualquier número entero se puede expresar como la suma de los cubos de cinco números enteros. Por ejemplo,

$$52 = 4^3 + (-3)^3 + 2^3 + 2^3 + (-1)^3.$$

Ayuda: Demuestra que cada número divisible por 6 se puede expresar como suma de 4 cubos.

Solución. Observemos que $(n+1)^3 + (n-1)^3 - 2n^3 = (n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 = 6n$. Por lo tanto, cualquier número divisible por 6 se puede expresar como la suma de cuatro cubos.

Al añadir 0, obtenemos la suma de cinco cubos. Al añadir ± 1, ± 8 y 27, representamos de manera correspondiente todos los números en forma de suma de cinco cubos. $\square$

Problema 16. En la circunferencia se colocan n números, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uno de los cuales es igual a 1 o -1. Además, la suma de los productos de números adyacentes es igual a cero, y en general, para cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$, la suma de los productos de números que están separados por k lugares es igual a cero (es decir,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = 0, x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2 = 0, x_1x_4 + x_2x_5 + \ldots + x_nx_3 = 0,$$

y así sucesivamente. (Por ejemplo, para $n = 4$, uno de los números puede ser -1 y los otros tres pueden ser 1).

Demuestra que n tiene forma $n = 4k^2$ para algún número natural k.

Solución. Observemos que si la suma de n unos y menos unos es cero, entonces n es par. Por lo tanto sólo hay que demostrar que n es un cuadrado.

$$(x_1 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + \ldots x_n^2) + (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2) + \ldots.$$

En el lado derecho de esta ecuación, el primer término es igual a n, mientras que todos los demás son iguales a 0. Por lo tanto, n es un cuadrado. □

Problema 17. La suma de los módulos de los términos de una progresión aritmética finita es igual a 100. Si todos sus términos se incrementan en 1 o si todos sus términos se incrementan en 2, en ambos casos, la suma de los módulos de los términos de la nueva progresión sigue siendo igual a 100. ¿Qué valores puede tomar la magnitud n^2d bajo estas condiciones, donde d es la diferencia de la progresión y n es el número de términos?

Solución. Denotemos la suma de los módulos de los términos de la progresión aritmética como S. Nosotros suponemos que la progresión es creciente ($d \geq 0$). El otro caso se demuestra igual. De acuerdo con la condición del problema, la función

$$S(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$$

toma los mismos valores en tres puntos diferentes ($x = 0, -1, -2$).

Sea $S_{n,k} = -\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$. Entonces si $a_k \leq x \leq a_{k+1}$,

$$S(x) = \sum_{i=1}^{k}(x - a_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(a_i - x) = (2k - n)x + S_{n,k}$$

(¡Ojo! Comprueba que pasa si $x < a_1$ ó $x > a_n$.

Así que $S(x)$ decrece si $x \leq a_k$ con $k < \frac{n}{2}$, es constante si $a_k \leq x \leq a_{k+1}$ con $k = \frac{n}{2}$ y crece si $x > a_k$ con $k > \frac{n}{2}$. Como $S(x)$ toma el mismo valor en tres puntos, $n = 2l$ es un numero par y

$$S = S_{l,n} = -\sum_{i=1}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{n} a_i = \frac{l}{2}(-a_1 - a_l + a_{l+1} + a_n) = \frac{dn^2}{4}.$$

Por lo tanto, $dn^2 = 400$.

En el caso de la progresión decreciente obtendríamos que $dn^2 = -400$.

□

Problema 18. Se considera la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. ¿Existe una progresión aritmética

a) de longitud 5;

b) de longitud arbitrariamente grande,

compuesta por términos de esta secuencia?.

Solución. Consideremos una progresión descendente de n números naturales (por ejemplo, n, n–1, ..., 1). Dividiendo todos sus términos por su mínimo común múltiplo, obtenemos una progresión de las fracciones que buscamos.

Por ejemplo para $n = 5$ obtendremos $\frac{1}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}$.

□

Problema 19. En un triángulo rectángulo ABC con catetos AC y BC e hipotenusa AB, se dibuja la altura CO hasta la hipotenusa. Demuestra que $|AC| + |BC| \leq |AB| + |CO|$.

Solución. Pongamos $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ y $|CO| = h$. Como

$$(a^2 + b^2)(a + b)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) = (a^2 + b^2 + ab)^2 - (ab)^2 < (a^2 + b^2 + ab)^2,$$

obtenemos obtenemos que

$$(\sqrt{a^2 + b^2})(a + b) < a^2 + b^2 + ab.$$

Por el Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$ y por la formula del área del triangulo $\frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$. Entonces

$$c(a + b) < c^2 + ch.$$

Por lo tanto, $a + b < c + h$.

□

Problema 20. Probar que si en un triángulo de área s el producto de dos medianas es $3s/2$ entonces esas dos medianas son perpendiculares.

Solución. Sea ABC un triángulo con medianas AM y BN. Denotemos por $G = AM \cap BN$ al baricentro, y pongamos $\alpha := \angle NGA$. Entonces

$$\frac{(ABC)}{6} = (AGN) = \frac{AG \cdot GN \cdot sen\alpha}{2} = \frac{AM \cdot BN \cdot sen\alpha}{9}.$$

Por tanto $AM \cdot BN = (3/2)(ABC)$ si y sólo si $sen\alpha = 1$; es decir, si y sólo si $\alpha = 90°$.

□

Problema 21. De todos los prismas rectangulares con volumen V, ¿cuál es el que su superficie tiene menor área?

Solución. Sea $a, b > 0$ las longitudes de dos lados perpendiculares del rectángulo de la base del prisma, y sea c su altura. Si el volumen del prisma es V, tenemos que $abc = V$. El área de su superficie es $2(ab + ac + bc)$. Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, tenemos que

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{(ab) \cdot (ac) \cdot (bc)} = \sqrt[3]{(abc)^2} = V^{\frac{2}{3}},$$

y la igualdad se da sólo cuando $ab = ac = bc$, que equivale a $a = b = c$. Por tanto,

$$\text{Área del prisma de dimensiones } a \times b \times c \geq 6V^{\frac{2}{3}}$$

y el mínimo se alcanza para el cubo de volumen V, es decir, el cubo de lado $V^{\frac{1}{3}}$.

□

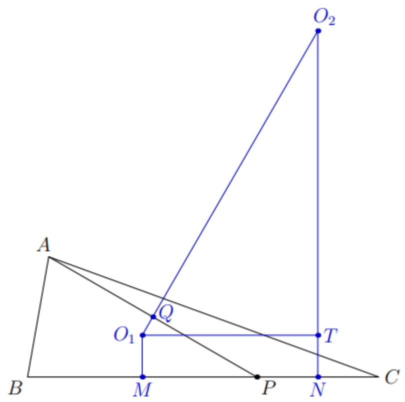
Problema 22. Sea P un punto del segmento BC de un triángulo ABC. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ABP y ACP respectivamente.

a) Sean M y N los puntos medios de los segmentos BP, PC respectivamente, y sea T el pie de la altura de O_1 al segmento O_2N. Demuestra que el cuadrilátero O_1MNT es un rectángulo, y que $|O_1T| = \frac{|BC|}{2}$.

b) Supongamos además que se cumple que $|BC| = |O_1O_2|$. Halla los ángulos del triángulo O_1O_2T.

c) Bajo la suposición de que que $|BC| = |O_1O_2|$, demuestra que alguno de los ángulos del triángulo ABC es mayor de $75°$.

Solución.



a) El circuncentro de un triángulo es un punto que equidista de los tres vértices del triángulo, y por tanto se encuentra en las mediatrices de los tres lados del triángulo. En particular, el segmento O_1M es perpendicular a BP y O_2N es perpendicular a PC. Por tanto, tanto O_1M como NT son perpendiculares a MN. Por definición de T, O_1T es perpendicular a O_2N, que tiene la misma dirección que NT. Por tanto el cuadrilátero O_1TNM tiene cuatro ángulos rectos, y por tanto es un rectángulo. Además

$$|O_1T| = |MN| = |MP| + |PN| = \frac{|BP| + |PC|}{2} = \frac{|BC|}{2}.$$

b) Por la parte a) y la hipótesis de que $|BC| = |O_1O_2|$ sabemos que $|O_1T| = \frac{|O_1O_2|}{2}$. Sabemos que el triángulo O_1O_2T es recto, siendo los catetos O_1T y O_2T. Sea O_1' el resultado de reflejar el punto O_1 respecto del lado O_2T. Tenemos que

$$|O_1O_2| = |O_1'O_2| = 2|O_1T| = |O_1T| + |TO_1'|,$$

por lo que el triángulo $O_2O_1O_1'$ es equilátero, y en particular todos sus ángulos miden $60°$. De esto deducimos que

$$\begin{aligned}
&\angle O_2O_1T = \angle O_2O_1O_1' = 60° \\
&\angle O_1TO_2 = 90° \\
&\angle TO_2O_1 = 180° - 90° - 60° = 30°
\end{aligned}$$

1. Sea Q el punto medio del segmento AP. Argumentando como antes, vemos que como O_1 es el circuncentro del triángulo ABP, O_1Q es perpendicular a AP. Similarmente, O_2Q es perpendicular a AP. Por tanto, O_1, O_2 y Q están alineados, de hecho, Q está en el segmento O_1O_2.

   Observamos el cuadrilátero PNO_2Q. Por la parte anterior sabemos que $\angle NO_2Q = \angle TO_2O_1 = 30°$ si T está en el segmento O_2N, y $\angle NO_2Q = 180° - \angle TO_2O_1 = 150°$ si T no está en el segmento O_2N sino en su prolongación por uno de los lados. En cualquier caso, el cuadrilátero PNO_2Q tiene dos ángulos rectos ($\angle PNO_2$ y $\angle O_2QP$), y como los ángulos de un cuadrilátero suman $360°$, entonces los otros dos ángulos miden $30°$ y $150°$. Tenemos que $\angle QPN = 180° - \angle BPQ$ puede ser igual a $150°$ o a $30°$.

   Si $\angle QPN = 150°$, entonces mirando los ángulos del triángulo ABP obtenemos que

$$\angle PAB + \angle ABP = 180° - \angle BPA = 180° - \angle BPQ = \angle QPN.$$

Como P es un punto del interior del segmento PC tenemos que $\angle PAB < \angle CAB$. Además, $\angle ABP = \angle ABC$. Por tanto,

$$150^\circ = \angle QPN < \angle ABC + \angle CAB,$$

por lo que el máximo de $\angle ABC$ y $\angle CAB$ tiene que ser mayor de 75° ($75 = \frac{150}{2}$).

Por otra parte, si $\angle QPN = 30^\circ$, entonces mirando los ángulos del triángulo APC obtenemos que

$$\angle PCA + \angle CAP = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - \angle QPN = 150^\circ.$$

Como P es un punto del interior del segmento PC tenemos que $\angle CAP < \angle CAB$. Además, $\angle PCA = \angle BCA$. Por tanto,

$$150^\circ < \angle BCA + \angle CAB,$$

por lo que el máximo de $\angle BCA$ y $\angle CAB$ tiene que ser mayor de 75° ($75 = \frac{150}{2}$).

En cualquiera de los casos, hemos demostrado que hay un ángulo entre $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$ que es mayor de 75°, que es lo que nos pedían demostrar.

$\square$

Problema 23. Sean h_1, h_2, h_3 las alturas de un triángulo y r el radio del circunferencia inscrita en el triángulo. Demuestra que

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r.$$

Solución. Supongamos que a, b, c son los lados del triángulo correspondientes a las alturas h_1, h_2 y h_3, respectivamente. Además, sea S el área del triángulo. Entonces,

$$S = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

Por lo tanto,

$$h_1 = (1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}).$$

Análogamente,

$$h_2 = (1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b})r, \ h_3 = (1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c})r.$$

Por lo tanto,

$$h_1 + h_2 + h_3 = (3 + (\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c}) + (\frac{c}{b} + \frac{b}{c}))r \geq (3 + 2 + 2 + 2)r = 9r.$$

$\square$

Problema 24. Un número natural se incrementó en un 10% y nuevamente obtuvimos un número natural. ¿Podría la suma de los números disminuir exactamente un 10%?

Solución. Sí es posible: 998888888880, 99999906666660, $8 \dots 80$ (45 ochos).

Ayuda para buscar estos números: la suma de los dígitos del número N original hay que escoger igual al múltiplo de 90; si es igual a $90n$, entonces al sumar N y $0,1N$ debería haber $11n$ traspasos al siguiente dígito a la hora de sumar.

$\square$

Problema 25. A cada pareja de números entero x e y corresponde un determinado número $x \maltese y$. Encuentra $2023 \maltese 2024$ si se sabe que para tres números cualesquiera x, y, z se cumplen las siguientes identidades: $x \maltese x = 0$ y $x \maltese (y \maltese z) = (x \maltese y) + z$.

Solución. Tenemos las siguientes igualdades

$$x\maltese y = x\maltese(y\maltese y) - y = x\maltese 0 - y = x\maltese(x\maltese x) - y = x\maltese x + x - y = x - y.$$

(Hay varias maneras de llegar a esta expresión).

Por lo tanto, $2023\maltese 2024 = -1$.

$\square$

Problema 26. De todos los prismas rectangulares abiertos (con sólo cinco caras, falta la tapa) que albergan un volumen V , ¿cuál es el que su superficie tiene menor área?

Solución. Sea $a, b > 0$ las longitudes de dos lados perpendiculares del rectángulo de la base del prisma, y sea c su altura, y supongamos que falta la tapa de arriba. Si el volumen del prisma es V, tenemos que $abc = V$. El área de su superficie es $ab + 2ac + 2bc$. Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, tenemos que

$$\frac{ab + 2ac + 2bc}{3} \geq \sqrt[3]{(ab)\cdot(2ac)\cdot(2bc)} = \sqrt[3]{4(abc)^2} = (2V)^{\frac{2}{3}},$$

y la igualdad se da sólo cuando $ab = 2ac = 2bc$, que equivale a $a = b = 2c$. En ese caso, $abc = 4c^3 = V$, por lo que $c = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ y $a = b = \sqrt[3]{2V}$.

Por tanto,

$$\text{Área del prisma de dimensiones } a\times b\times c \text{ sin una tapa de area } ab \geq 3(2V)^{\frac{2}{3}}$$

y el mínimo se alcanza para el prisma abierto de lados $c = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$, $a = b = \sqrt[3]{2V}$ al que le falta una tapa de área ab.

$\square$

Problema 27. Demuestra que hay un número infinito de tripletas de números naturales a, b, c para los cuales se cumple la igualdad $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Solución. Esta igualdad se puede escribir en la forma

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{15} + \left(\frac{b}{c}\right)^{15} = c.$$

Elijamos números naturales arbitrarios n y m y pongamos $c = n^{15} + m^{15}, a = c\cdot n, b = c\cdot m$.

$\square$

Problema 28. Formamos una secuencia de longitud n sin repetición a partir de los números naturales del 1 al n. Decimos que la secuencia es mala si se puede seleccionar 10 números (no necesariamente adyacentes) que están en orden descendente. Las demás secuencias se consideran buenas. Demuestra que la cantidad de secuencias buenas no supera 81^n.

Solución. Demostraremos que si una secuencia es buena, entonces los números en la secuencia se pueden colorear con nueve colores de manera que los números de cada color estén en orden ascendente. En efecto, colorearemos los números de izquierda a derecha, utilizando en cada ocasión el color con el número más bajo y tal que el último número coloreado en ese color sea menor que el número actual. Supongamos que nueve colores no son suficiente. No podemos colorear el próximo número en el noveno color, ya que hay un número mayor que ya ha sido coloreado en ese color. Este numero no hemos coloreado en el octavo color, ya que también hay un número mayor que ha sido coloreado en el octavo color, y así sucesivamente. Esto lleva a una secuencia de 10 números en orden descendente, lo cual es una contradicción.

La secuencia de los números del 1 al n junto con la coloración en nueve colores de manera que la secuencia de cada color sea ascendente se determina por el color de cada número del 1 al n y el color de cada posición en la secuencia. Los números del 1 al n se pueden colorear en 9 colores de 9^n maneras diferentes. Del mismo modo, las n posiciones se pueden colorear en 9 colores. Por lo tanto, el número de secuencias buenas no supera los $9^n \cdot 9^n = 81^n$.

$\square$

Problema 29. En un poliedro convexo, denotemos por V, A y T el número de vértices, aristas y el máximo número de caras triangulares que tienen un vértice común, respectivamente. Demuestra que

$$V\sqrt{A+T} \geq 2A.$$

Por ejemplo, para un tetraedro ($V = 4$, $A = 6$, $T = 3$) se cumple la igualdad, mientras que para una prisma triangular ($V = 6$, $A = 9$, $T = 1$) o un cubo ($V = 6$, $A = 12$, $T = 0$), se cumple estrictamente la desigualdad.

Solución. La valencia (o el grado) de un vértice de un poliedro se refiere a la cantidad de aristas que salen de ese vértice. Los vértices son adyacentes si están conectados por una arista.

Sea v un vértice arbitrario del poliedro, k su valencia, m_j las valencias de todos los vértices adyacentes a v ($j = 1, 2, \ldots, k$), numerados en un orden arbitrario. Entonces,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

es el número total de aristas que salen de los vértices adyacentes a v, contadas una o dos veces. Las aristas que yacen frente al vértice v en alguna cara triangular del poliedro se cuentan dos veces y solo esas. Por lo tanto,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k \leq A + T.$$

De aquí, utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, obtenemos:

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \ldots + \sqrt{m_k} \leq \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{k}} \leq \sqrt{\frac{A+T}{k}}.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{\frac{m_1}{k}} + \sqrt{\frac{m_2}{k}} + \ldots + \sqrt{\frac{m_k}{k}} \leq \sqrt{A+T}.$$

Denotemos la suma en el lado izquierdo de esta última desigualdad como $S(v)$.

Sean v_i ($i = 1, 2, \ldots, V$) todos los vértices del poliedro, numerados en un orden arbitrario, y n_i ($i = 1, 2, \ldots, V$) sus valencias correspondientes. Para cualquier par de vértices adyacentes v_i y v_j, la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica implica:

$$\sqrt{\frac{n_j}{n_i}} + \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} \geq 2.$$

Sumando estas desigualdades para todos los pares no ordenados $\{v_i, v_j\}$ de vértices adyacentes del poliedro, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{V} S(v_i) \geq 2A.$$

Hemos demostrado anteriormente que $S(v) \leq \sqrt{A+T}$. Por lo tanto, $V\sqrt{A+T} \geq 2A$.

□

Problema 30. Números positivos $x_1, \ldots, x_k$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + \ldots + x_k}{2}, x_1 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

a) Demuestra que $k > 200$.

b) Construye un ejemplo de tales números que satisfaces estas dos desigualidades.

c) Encuentra el valor mínimo de k para el cual es posible un ejemplo.

Solución. a) De acuerdo con la condición

$$4(x_1^2+\ldots+x_k^2)<2(x_1+\ldots+x_k)<x_1^3+\ldots+x_k^3.$$

Por lo tanto, para al menos un número (supongamos x_1), se cumple la desigualdad $x_1>4$. Por lo tanto, $x_1>4$. Dado que el mínimo de la función $2x^2-x$ es $-\frac{1}{8}$, entonces

$$0>2(x_1^2+\ldots+x_k^2)-(x_1+\ldots+x_k)>28-\frac{k-1}{8}.$$

De aquí, $k>1+8\cdot 28>200$.

b) Tomemos $k=2501$, $x_1=10$, $x_2=x_3=\ldots=x_{2501}=\frac{1}{10}$. Entonces, todas las desigualdades se cumplen.

c) Definamos

$$p(x)=2x^2-x,\ q(x)=x^3-2x \text{ y } f(x)=\frac{q(x)}{p(x)}=\frac{x^2-2}{2x-1}.$$

Notemos que la función p es negativa en el intervalo $(0,\frac{1}{2})$, decrece en el intervalo $(0,\frac{1}{4})$ y aumenta en el intervalo $(\frac{1}{4},+\infty)$; q decrece en $(0,\frac{1}{2})$; f aumenta en $(-\infty,\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2},+\infty)$ y es positiva en $(0,\frac{1}{2})$.

Supongamos que k es el mínimo, y los números $x_1\le x_2\le\ldots\le x_k$ cumplen con la condición, es decir, $p(x_1)+\ldots+p(x_k)<0$, $q(x_1)+\ldots+q(x_k)>0$. Entonces, $x_{k-1}<\frac{1}{2}$. De lo contrario, podríamos reducir k reemplazando x_{k-1} y x_k por un número $x_0\ge x_k$ tal que $p(x_0)=p(x_{k-1})+p(x_k)$. En este caso, la suma de $p(x_i)$ no cambiaría, y la suma de $q(x_i)$ no disminuiría:

$$q(x_0)=f(x_0)p(x_0)=f(x_0)p(x_{k-1})+f(x_0)p(x_k)\ge f(x_{k-1})p(x_{k-1})+f(x_k)p(x_k)=q(x_{k-1})+q(x_k).$$

Ahora, a partir de la solución a) vemos que $x_k>4$. Luego, sin cambiar k, simplificaremos la secuencia $\{x_i\}$ paso a paso.

Si algún número $x_i\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, lo reemplazamos por $\frac{1}{2}-x_i$. En este caso, la suma de $p(x_i)$ no cambiará, y la suma de $q(x_i)$ no disminuirá. Por lo tanto, podemos asumir que $x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}\le\frac{1}{4}$.

Sea $n=k-1$ y P la media aritmética de $p(x_1),\ldots,p(x_n)$. Reemplacemos cada uno de los números $x_1\le x_1\le\ldots\le x_n$ con un número $u\in(0,\frac{1}{4}]$ tal que $p(u)=P<0$. En este caso, la suma de $p(x_i)$ no cambiará. Demostremos que la suma de $q(x_i)$ no disminuirá.

Sea

$$\alpha_i=\frac{p(x_i)}{nP} \text{ y } t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Entonces, por la desigualdad de Jensen y la desigualdad entre las medias, tenemos:

$$p(t)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p(x_i)=nP\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\le P(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)^2=P=p(u).$$

Por lo tanto, $t\ge u$. Entonces,

$$nq(u)\ge nq(t)=nf(t)p(t)\ge np(t)\sum_{i=1}\alpha_i f(x_i)=\frac{p(t)}{P}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)f(x_i)=\frac{p(t)}{p(u)}\sum_{i=1}^{n}q(x_i)\ge\sum_{i=1}^{n}q(x_i).$$

Queda por determinar el valor mínimo de n para el cual existen $u\le\frac{1}{2}$ y $v>4$ tales que

$$2(nu^2+v^2)<nu+v \text{ y } 2(nu+v)<(nu^3+v^3).$$

Reescribiremos estas desigualdades como

$$\frac{2v^2-v}{u-2u^2}<n<\frac{v^3-v}{2u-u^2}.$$

De aqui $f(v)>f(u)$. Evaluaremos el valor mínimo que la expresión $\frac{2v^2-v}{u-2u^2}$ puede tener con nuestras restricciones. Este valor será una cota inferior para n. Reduciremos v hasta alcanzar el punto donde

$f(v) = f(u)$. Dado que $f(u) > f(0) = 2 = f(4)$, el nuevo valor de v será mayor que 4 y $\frac{2v^2-v}{u-2u^2}$ solo disminuirá.

Ahora, u y v son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 2 = t(2x-1)$ (donde $t = f(u)$), entonces $u + v = 2t$ y entonces

$$v = 2f(u) - u = \frac{4-u}{1-2u}$$

Por lo tanto después de sustituir v obtenemos

$$g(u) = \frac{2v^2 - v}{u - 2u^2} = \frac{7(4-u)}{u(1-2u)^3}$$

La función $g(u)$ tiene su mínimo en $u_0 = \frac{8-\sqrt{58}}{3} \in (0, \frac{1}{4}]$. Por lo tanto,

$$n > g(u_0) = 514, 16\ldots,$$

lo que implica $n \geq 515$ y $k \geq 516$.

Construyamos un ejemplo para $n = 515$. Tomaremos $u = \frac{1}{8}$ (cerca de u_0). El valor correspondiente de v será $5, 169$. A medida que incrementemos v, $f(v)$ aumentará y habrá un punto donde $f(v)$ sea mayor que 515 y $g(v)$ sea menor que 515. Nos detendremos en ese valor (por ejemplo, $v = 5, 169$ nos sirve).

Respuesta: $k = 516$.

$\square$

Problema 31. Sean a, b, c tres números positivos de suma 1. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca} b^{b^2+2ab} c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

Solución. La desigualdad que tenemos que demostrar es equivalente a demostrar que

$$3 \geq \left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca} \left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab} \left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc}$$

Recordamos que para todo par de números reales x, y con $x > 0$, $x^y = e^{y \ln x}$. Así, reescribimos la desigualdad que tenemos que demostrar como

$$e^{(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right)} e^{(b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right)} e^{(c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right)} \leq 3$$

Aplicando propiedades de la exponencial, esto es

$$e^{(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right)+(b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right)+(c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right)} \leq 3.$$

Como $a + b + c = 1$, tenemos que $(a+b+c)^2 = (a^2 + 2ca) + (b^2 + 2ab) + (c^2 + 2bc) = 1$. Por tanto, la desigualdad de Jensen aplicada a la función convexa $f(x) = e^x$ nos dice que

$$\begin{aligned} e^{(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right)+(b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right)+(c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right)} &\leq (a^2+2ca)e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} + (b^2+2ab)e^{\ln\left(\frac{1}{b}\right)} + (c^2+2bc)e^{\ln\left(\frac{1}{c}\right)} \\ &= \frac{a^2+2ca}{a} + \frac{b^2+2ab}{b} + \frac{c^2+2bc}{c} \\ &= a + 2c + b + 2a + c + 2b \\ &= 3(a+b+c) = 3, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

$\square$

Problema 32. (Problema para los alumnos de bachillerato, que ya saben trigonometría) Usa la desigualdad de Jensen para demostrar que, de todos los polígonos de n lados inscritos en un círculo de radio r, el que tiene el perímetro más grande es el polígono regular de n lados.

Solución. Sean $\theta_1, \ldots, \theta_n$ los ángulos centrales correspondientes a los distintos lados de un n-ágono, medidos en radianes. La longitud a_i del lado correspondiente a θ_i cumple que $sen\left(\frac{\theta_i}{2}\right) = \frac{\frac{a_i}{2}}{r} = \frac{a_i}{2r}$.

Dibujando su gráfica, vemos que la función $f(x) = -sen(x)$ es una función estrictamente convexa en el intervalo $[0, \pi]$. Tenemos que $\frac{\theta_i}{2}$ está en el intervalo $(0, \pi)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. La desigualdad de Jensen aplicada a la función $f(x) = -sen(x)$ nos dice que

$$-sen\left(\frac{1}{n}\frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{n}\frac{\theta_2}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{\theta_n}{2}\right) \leq -\frac{1}{n}sen\left(\frac{\theta_1}{2}\right) - \frac{1}{n}sen\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \ldots - \frac{1}{n}sen\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

y la igualdad se da solo cuando $\frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_2}{2} = \ldots = \frac{\theta_n}{2}$, es decir, para el polígono regular de n lados.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por -1, obtenemos que

$$sen\left(\frac{1}{n}\frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{n}\frac{\theta_2}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{\theta_n}{2}\right) \geq \frac{1}{n}\left(sen\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + sen\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \ldots + sen\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right).$$

Usando que $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = 2\pi$, tenemos que la parte izquierda de la desigualdad es $sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, una cantidad que sólo depende de n, no del polígono concreto de n lados inscrito en el círculo de radio r. Por otra parte, tenemos que

$$\frac{1}{n}\left(sen\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + sen\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \ldots + sen\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right) = \frac{1}{n}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_r}{2r}.$$

Por tanto,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r \leq 2rnsen\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

es decir, el perímetro de un polígono de n lados inscrito en un círculo de radio r es menor o igual que $2rnsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$, y esa cota superior se alcanza sólo para el polígono regular de n lados.

□