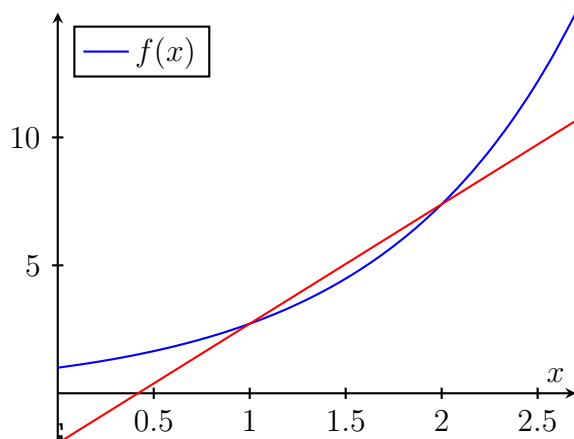




Fecha: 6, 20, 27 de octubre y 3 de noviembre de 2023.

Desigualdades

Una función es **convexa** en su dominio si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su gráfica está por encima de la gráfica de la función en ese intervalo. Intuitivamente, las funciones son convexas si su gráfica tiene forma de $\cup$.



Sean dos números reales a, b con $a < b$. La recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Por tanto, una función $f(x)$ es convexa en un intervalo I si para todo a, b en I con $a < b$ tenemos que para todo x en el intervalo $[a, b]$ se cumple que $g(x) \geq f(x)$, es decir, se cumple que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geq f(x). \quad (1)$$

Además, decimos que una función es **estrictamente convexa** en un intervalo I si para todo a, b en I con $a < b$ se cumple que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x)$$

para todo x tal que $a < x < b$.

Manipulando estas desigualdades, obtenemos lo siguiente.

Primera caracterización de convexidad: La función $f(x)$ es **convexa** en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

para todo x en el intervalo $[a, b]$.

$f(x)$ es además **estrictamente convexa** en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

para todo x en el intervalo (a, b) .

Problema 1. Sea n un número entero positivo.

a) Demuestra que para todo par de números reales y, z se tiene que

$$y^n - z^n = (y - z) \left(\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j \right),$$

donde $\sum_{j=0}^{n-1} y^{n-1-j} z^j = y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots yz^{n-2} + z^{n-1}$.

b) Usa la parte a) para demostrar que $f(x) = x^n$ es una función convexa en el intervalo $(0, \infty)$, y estrictamente convexa si $n > 1$.

Conviene recordar los siguientes ejemplos de funciones convexas, aunque no veamos la demostración de que lo son.

Ejemplos: Las siguientes funciones son convexas en los dominios indicados.

- $f(x) = x^c$ en el intervalo $(0, \infty)$ para todo $c \geq 1$, y estrictamente convexa si $c > 1$.
- $f(x) = x^{2n}$ es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}$ para todo número entero $n \geq 1$.
- $f(x) = e^x$ es estrictamente convexa en todo su dominio $(\mathbb{R})$ para todo $c > 0$.

Veamos una definición equivalente de función convexa. Todo número x en el intervalo $[a, b]$ se puede escribir como $x = (1 - t)a + tb$ para un único valor de t en $[0, 1]$. Por ejemplo, para $t = 0$ obtenemos que $x = a$, para $t = 1$ obtenemos que $x = b$, y al ir aumentando el valor de t desde 0 a 1 vamos recorriendo el intervalo $[a, b]$ desde a hasta b . Por tanto, sustituyendo $x = (1 - t)a + tb$ en la desigualdad (1) nos da la siguiente caracterización equivalente de convexidad.

Segunda caracterización de convexidad: La función $f(x)$ es convexa en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$(1 - t)f(a) + tf(b) \geq f((1 - t)a + tb)$$

para todo t en el intervalo $[0, 1]$.

$f(x)$ es además **estrictamente convexa** en el intervalo I cuando para todo a, b en I con $a < b$, se cumple que

$$(1 - t)f(a) + tf(b) > f((1 - t)a + tb)$$

para todo t en el intervalo $(0, 1)$.

Veamos una desigualdad muy general y muy importante de la que deduciremos el resto de desigualdades que van a aparecer en esta hoja.

Desigualdad de Jensen: Sea $n \geq 1$, sea $f(x)$ una función convexa en un intervalo I , sean $x_1, \dots, x_n$ en I , y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Entonces,

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Además, si $f(x)$ es estrictamente convexa en I , y $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, se da la igualdad en la desigualdad de Jensen si y solo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Problema 2. Demuestra que si $x_1, \dots, x_n$ están en el intervalo I y si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ son tales que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, entonces $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ está en el intervalo I .

Problema 3. A partir de la segunda caracterización de convexidad, demuestra la desigualdad de Jensen en los casos $n = 1$ y $n = 2$, incluida la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad.

Ejemplo resuelto. Demuestra la desigualdad de Jensen para cualquier número $n \geq 2$ de sumandos, incluyendo la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad.

Solución. Si hemos hecho el ejercicio anterior, sólo nos queda demostrar la desigualdad de Jensen para n sumandos, con $n \geq 3$.

Supongamos que la desigualdad de Jensen es cierta para un valor de n concreto, con $n \geq 2$. Sean $x_1, \dots, x_{n+1}$ en I y sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Entonces,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Como $(1 - \lambda_{n+1}) + \lambda_{n+1} = 1$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen para dos sumandos y obtenemos que

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= \\ &= f \left((1 - \lambda_{n+1}) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) f \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Además, si $0 < \lambda_{n+1} < 1$ y $f(x)$ es estrictamente convexa en I , la igualdad se obtiene si y solo si

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n = x_{n+1}$$

Vemos que $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$, por lo que por la desigualdad de Jensen para n sumandos,

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_{n+1}) f \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) & \\ \leq (1 - \lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_2) + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n) \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) & \\ = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) & \end{aligned}$$

Además, si $0 < \lambda_i < 1$ para todo i y $f(x)$ es estrictamente convexa, la igualdad se da si y solo si

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Juntando las dos cadenas de desigualdades, obtenemos la desigualdad de Jensen para $n + 1$ sumandos, así como la parte del enunciado referente a cuándo se da la igualdad, ya que si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, entonces $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{n+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n = x_1 \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = x_1$. Así, a partir de la desigualdad de Jensen para la de 2 sumandos podemos obtener la de 3 sumandos, a partir de esa la de 4, etc. Por tanto, la desigualdad de Jensen es cierta para cualquier número $n \geq 1$ de sumandos. $\square$

Desigualdad de las medias aritmética y geométrica: Sea $n \geq 1$, y sean $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Entonces,

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Además, la igualdad ocurre si y sólo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Problema 4. Demuestra la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a partir de la desigualdad de Jensen, incluida la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad. **Ayuda:** Llama y_j a $\sqrt[n]{x_j}$ para todo $j = 1, \dots, n$ y reescribe la desigualdad de las medias aritmética y geométrica en términos de los y_j .

Desigualdad de las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática (enunciadas en orden de aparición): Sea $n \geq 1$, y sean $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Entonces,

$$0 < \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Además, los $\leq$ son una igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Problema 5. Demuestra todas las desigualdades del recuadro anterior (menos la de las medias aritmética y geométrica, que ya la has demostrado), incluida la parte del enunciado sobre cuándo se da la igualdad. Para ello, usa las desigualdades de Jensen y la de las medias aritmética y geométrica.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Sea $n \geq 1$, y sean $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dos secuencias de n números reales. Entonces,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Además, la igualdad ocurre si y sólo si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ son proporcionales, es decir, si existe un número real λ tal que $a_i = \lambda b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, o tal que $b_i = \lambda a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo resuelto. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz a partir de la desigualdad de Jensen.

Solución. Supongamos que $b_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Sea $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$.

Notemos que $\frac{b_i^2}{B^2} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y que $\frac{b_1^2}{B^2} + \frac{b_2^2}{B^2} + \dots + \frac{b_n^2}{B^2} = 1$. Aplicando la desigualdad de Jensen a la función $f(x) = x^2$, que es estrictamente convexa en todo su dominio ($\mathbb{R}$), obtenemos que

$$\left(\frac{a_1}{b_1} \frac{b_1^2}{B^2} + \frac{a_2}{b_2} \frac{b_2^2}{B^2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n^2}{B^2} \right)^2 \leq \frac{b_1^2}{B^2} \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^2 + \frac{b_2^2}{B^2} \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2 + \dots + \frac{b_n^2}{B^2} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2$$

y la igualdad se da si y solo si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, es decir, si y solo si $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ son proporcionales.

Simplificamos la desigualdad obtenida y deducimos que

$$\left(\frac{a_1 b_1}{B^2} + \frac{a_2 b_2}{B^2} + \dots + \frac{a_n b_n}{B^2} \right)^2 \leq \frac{1}{B^2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2),$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene multiplicando ambos lados de la desigualdad por $B^2 > 0$.

Ahora, si alguno de los b_i son 0, podemos suponer reordenando que son los k primeros. Si $k = n$ el resultado es inmediato. Si no, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $n - k$ sumandos con todos los $b_i \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &= (a_{k+1} b_{k+1} + a_{k+2} b_{k+2} + \dots + a_n b_n)^2 \\ &\leq (a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \dots + b_n^2), \end{aligned}$$

donde la igualdad se da si y solo si $(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$ y $(b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)$ son proporcionales. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} (a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_{k+1}^2 + b_{k+2}^2 + \dots + b_n^2) &= (a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), \end{aligned}$$

donde la igualdad se da si y solo si $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Juntando todo, obtenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y que la desigualdad se obtiene si y solo si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ son proporcionales. $\square$

Problema 6. Sean $a, b, c \geq 0$. Demuestra que

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ac}.$$

Problema 7. Sean a, b, u, v números enteros. Demuestra la igualdad

$$(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = (au + bv)^2 + (av - bu)^2.$$

Problema 8. Sean $a, b, c > 0$. Demuestra que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Problema 9. Los números naturales se dividen en n progresiones aritméticas de tal forma que cada número natural pertenece exactamente a una de estas n progresiones. Sean $d_1, d_2, \dots, d_n$ las diferencias de estas progresiones. Demuestra que $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n} = 1$.

Problema 10. Los números naturales se dividen en varias (un número finito) progresiones aritméticas. Demuestra que al menos una de estas progresiones tiene su primer término divisible por su diferencia.

Problema 11. Se han colocado nueces en varias cajas. Se sabe que en promedio hay 10 nueces en cada caja, y el promedio de los cuadrados de la cantidad de nueces en las cajas es inferior a 1000. Demuestra que al menos el 10% de las cajas no están vacías

Problema 12. Los números a, b y c son distintos de cero y se cumplen las igualdades: $a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1$. Demuestra que $ab + bc + ca = 0$.

Problema 13. Demuestra que si el producto de tres números positivos es igual a 1 y la suma de estos números es estrictamente mayor que la suma de sus inversos, entonces exactamente uno de estos números es mayor que 1.

Problema 14. ¿Es posible encontrar diez números naturales consecutivos de manera que la suma de sus cuadrados sea igual a la suma de los cuadrados de los nueve números naturales consecutivos que les siguen?

Problema 15. Demuestra que cualquier número entero se puede expresar como la suma de los cubos de cinco números enteros. Por ejemplo,

$$52 = 4^3 + (-3)^3 + 2^3 + 2^3 + (-1)^3.$$

Ayuda: Demuestra que cada número divisible por 6 se puede expresar como suma de 4 cubos.

Problema 16. En la circunferencia se colocan n números, $x_1, x_2, \dots, x_n$, cada uno de los cuales es igual a 1 o -1 . Además, la suma de los productos de números adyacentes es igual a cero, y en general, para cada $k = 1, 2, \dots, n-1$, la suma de los productos de números que están separados por k lugares es igual a cero (es decir,

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0, x_1x_3 + x_2x_4 + \dots + x_nx_2 = 0, x_1x_4 + x_2x_5 + \dots + x_nx_3 = 0,$$

y así sucesivamente. (Por ejemplo, para $n = 4$, uno de los números puede ser -1 y los otros tres pueden ser 1).

Demuestra que n tiene forma $n = 4k^2$ para algún número natural k .

Problema 17. La suma de los módulos de los términos de una progresión aritmética finita es igual a 100. Si todos sus términos se incrementan en 1 o si todos sus términos se incrementan en 2, en ambos casos, la suma de los módulos de los términos de la nueva progresión sigue siendo igual a 100. ¿Qué valores puede tomar la magnitud n^2d bajo estas condiciones, donde d es la diferencia de la progresión y n es el número de términos?

Problema 18. Se considera la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. ¿Existe una progresión aritmética

- a) de longitud 5;
- b) de longitud arbitrariamente grande,

compuesta por términos de esta secuencia?

Problema 19. En un triángulo rectángulo ABC con catetos AC y BC e hipotenusa AB , se dibuja la altura CO hasta la hipotenusa. Demuestra que $|AC| + |BC| \leq |AB| + |CO|$.

Problema 20. Probar que si en un triángulo de área s el producto de dos medianas es $3s/2$ entonces esas dos medianas son perpendiculares.

Problema 21. De todos los prismas rectangulares con volumen V , ¿cuál es el que su superficie tiene menor área?

Problema 22. Sea P un punto del segmento BC de un triángulo ABC . Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ABP y ACP respectivamente.

- a) Sean M y N los puntos medios de los segmentos BP , PC respectivamente, y sea T el pie de la altura de O_1 al segmento O_2N . Demuestra que el cuadrilátero O_1MNT es un rectángulo, y que $|O_1T| = \frac{|BC|}{2}$.
- b) Supongamos además que se cumple que $|BC| = |O_1O_2|$. Halla los ángulos del triángulo O_1O_2T .
- c) Bajo la suposición de que $|BC| = |O_1O_2|$, demuestra que alguno de los ángulos del triángulo ABC es mayor de 75° .

Problema 23. Sean h_1 , h_2 , h_3 las alturas de un triángulo y r el radio del circunferencia inscrita en el triángulo. Demuestra que

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r.$$

Problema 24. Un número natural se incrementó en un 10% y nuevamente obtuvimos un número natural. ¿Podría la suma de los números disminuir exactamente un 10%?

Problema 25. A cada pareja de números entero x e y corresponde un determinado número $x \boxtimes y$. Encuentra $2023 \boxtimes 2024$ si se sabe que para tres números cualesquiera x, y, z se cumplen las siguientes identidades: $x \boxtimes x = 0$ y $x \boxtimes (y \boxtimes z) = (x \boxtimes y) + z$.

Problema 26. De todos los prismas rectangulares abiertos (con sólo cinco caras, falta la tapa) que albergan un volumen V , ¿cuál es el que su superficie tiene menor área?

Problema 27. Demuestra que hay un número infinito de tripletas de números naturales a, b, c para los cuales se cumple la igualdad $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Problema 28. Formamos una secuencia de longitud n sin repetición a partir de los números naturales del 1 al n . Decimos que la secuencia es mala si se puede seleccionar 10 números (no necesariamente adyacentes) que están en orden descendente. Las demás secuencias se consideran buenas. Demuestra que la cantidad de secuencias buenas no supera 81^n .

Problema 29. En un poliedro convexo, denotemos por V , A y T el número de vértices, aristas y el máximo número de caras triangulares que tienen un vértice común, respectivamente. Demuestra que

$$V\sqrt{A+T} \geq 2A.$$

Por ejemplo, para un tetraedro ($V = 4$, $A = 6$, $T = 3$) se cumple la igualdad, mientras que para una prisma triangular ($V = 6$, $A = 9$, $T = 1$) o un cubo ($V = 8$, $A = 12$, $T = 0$), se cumple estrictamente la desigualdad.

Problema 30. Números positivos $x_1, \dots, x_k$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + \dots + x_k}{2}, x_1 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

- a) Demuestra que $k > 200$.
- b) Construye un ejemplo de tales números que satisfacen estas dos desigualdades.
- c) Encuentra el valor mínimo de k para el cual es posible un ejemplo.

Problema 31. Sean a, b, c tres números positivos de suma 1. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca}b^{b^2+2ab}c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

Problema 32. (Problema para los alumnos de bachillerato, que ya saben trigonometría) Usa la desigualdad de Jensen para demostrar que, de todos los polígonos de n lados inscritos en un círculo de radio r , el que tiene el perímetro más grande es el polígono regular de n lados.