PIM

**Pequeño Instituto de Matemáticas 2023-24**

**Fecha:** 15, 22 y 29 de septiembre, 6 de octubre de 2023.

## ¿Qué es una demostración? El método de reducción al absurdo.

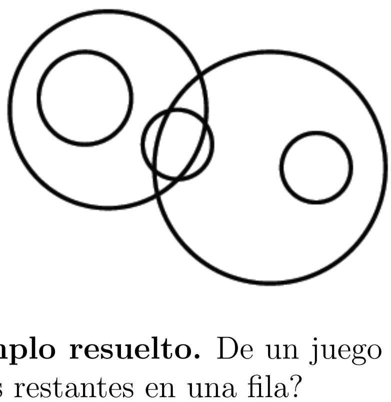
Una **demostración** matemática no es más que un argumento lógico bien explicado. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo resuelto.** En un congreso de las sociedades matemáticas españolas y francesas no había representantes de otros países. La suma total de dinero de los franceses resultó ser mayor que la suma total de dinero de los españoles, y la suma total de dinero de las mujeres resultó ser mayor que la suma total de dinero de los hombres. Demuestra que en el congreso participó por lo menos una matemática francesa.

*Solución.* Si en la reunión no hubiera francesas, es decir, todas las mujeres eran españolas, entonces la cantidad total de dinero entre las españolas sería mayor que la de todos los hombres. Por lo tanto, las españolas tendrían más dinero que los franceses. Pero esto entra en contradicción con la premisa de que la cantidad total de dinero entre los franceses es mayor que la cantidad total de dinero entre los españoles (hombres y mujeres juntos). Esta contradicción solo se explica porque nuestra suposición que no hubiera mujeres francesas en el congreso era incorrecta. Entonces hay francesas en el congreso y el ejercicio queda probado. □

Intenta resolver este ejercicio.

**Problema 1.** El guarda forestal contó los pinos en el bosque. Dio cinco vueltas alrededor de los círculos mostrados en el dibujo y encontró exactamente 3 pinos dentro de cada círculo.



Demuestra que el guarda forestal se equivocó.

**Ejemplo resuelto.** De un juego de dominó, se retiran todas las fichas con seises. ¿Se puede colocar las fichas restantes en una fila?

*Solución.* Supongamos que lo logramos. Ahora el cinco se encuentra 7 veces. Dentro de la cadena, ocurre un número par de veces. Entonces, en un extremo, debe estar un cinco. De manera similar, se puede probar que todos los demás números de las fichas de dominó están en los extremos. Pero hay seis números y sólo dos extremos. Contradicción. Así que nuestra suposición es incorrecta. Por lo tanto, no se puede colocar las fichas restantes en una fila. □

**Problema 2.** ¿Es posible distribuir 44 bolas en 9 montones de modo que el número de bolas en diferentes montones sea diferente?

**Problema 3.** En las casillas de un tablero de ajedrez, se han colocado todos los números naturales del 1 al 64 de alguna manera. Demuestra que siempre habrá dos casillas adyacentes, ya sea en el lado o en la esquina, cuyos números difieren en al menos 9.

Veamos otro ejemplo.

**Ejemplo resuelto.** Demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional[1].

*Solución.* El número $\sqrt{2}$ es un número real, así que o es racional o es irracional. $\sqrt{2}$ es un número positivo, así que si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, entonces podríamos expresarlo como una fracción irreducible de esta manera:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números enteros positivos y m.c.d.}(a, b) = 1.$$

Si esto último fuese verdad, podríamos elevar la igualdad enterior al cuadrado y multiplicar ambos lados por $b^2$ para obtener que

$$\text{existen dos números enteros positivos } a \text{ y } b \text{ tales que m.c.d.}(a, b) = 1 \text{ y tales que } 2b^2 = a^2. \qquad (1)$$

Ahora vemos que $2b^2 = a^2$ implica que 2 es un divisor de $a^2$. Si consideramos la descomposición en factores primos de $a^2$ nos damos cuenta de que esto sólo es posible si 2 es un divisor de $a$. Por tanto, podemos expresar $a$ como $a = 2a'$, donce $a'$ es un número entero positivo. Sustituimos el valor de $a$ en la expresión $2b^2 = a^2$ y obtenemos que $2b^2 = 4(a')^2$, que implica que

$$2(a')^2 = b^2, \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números enteros positivos.}$$

Argumentando de manera análoga al párrafo anterior deducimos que 2 es un divisor de $b^2$, por lo que es un divisor de $b$.

Hemos demostrado que si $\sqrt{2}$ fuese racional, entonces lo expresado en (1) sería cierto (en particular m.c.d.$(a, b) = 1$), y que 2 es un divisor tanto de $a$ como de $b$. Es decir, hemos demostrado que si $\sqrt{2}$ fuera racional entonces ocurriría algo imposible. Por tanto, $\sqrt{2}$ tiene que ser irracional. □

Este ejemplo que acabamos de ver es una **demostración por reducción al absurdo**. Las demostraciones por reducción al absurdo siguen siempre la siguiente estructura:

- Nos piden demostrar un enunciado $P$ (en el ejemplo anterior, $P =$"$\sqrt{2}$ es irracional").
- Asumimos que el enunciado $P$ es falso (en el ejemplo anterior sería asumir que $\sqrt{2}$ no es irracional, o lo que es lo mismo, que $\sqrt{2}$ es racional).
- A partir de la hipotesis de que $P$ es falso, deducimos lógicamente una contradicción/un absurdo (en el ejemplo anterior la contradicción ha sido que 2 sea un factor común de $a$ y $b$ a la vez que m.c.d.$(a, b) = 1$).
- Como las contradicciones son hechos imposibles, deducimos que nos hemos tenido que equivocar en asumir que $P$ es falso, por lo que $P$ tiene que ser cierto.

Realiza este ejercicio para practicar este tipo de demostración.

**Problema 4.** Demuestra que $\sqrt[3]{9}$ y $\sqrt[4]{80}$ son irracionales.

Veamos ahora otro ejemplo.

**Ejemplo resuelto.** Existen infinitos números primos[2].

[1] Los números racionales son aquellos que pueden ser expresados como $\frac{a}{b}$, donde $a$ y $b$ son números enteros y $b \neq 0$. Los números irracionales son los números reales que no son racionales.

[2] Los números primos son aquellos enteros positivos que tienen exactamente dos divisores enteros positivos, el 1 y ellos mismos. En particular, el 1 NO es primo, porque sólo tiene un divisor entero positivo.

*Solución.* Argumentamos por reducción al absurdo. Supongamos que sólo existen un número finito de números primos $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$. Consideramos el número $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, que es un número entero positivo estrictamente mayor que 1, y por tanto tiene que ser divisible por algún número primo. Sea $p_i$ un primo tal que $N$ es divisible por $p_i$.

Como $p_i$ es un divisor de $p_1 p_2 \cdots p_n$ y también de $N$, entonces $p_i$ es un divisor de $1 = N - p_1 p_2 \cdots p_n$, es decir, $p_i = 1$. Esto es imposible porque 1 no es un número primo. Hemos llegado a una contradicción que viene de asumir que hay un número finito de números primos, por lo que queda demostrado que hay infinitos primos. □

Intenta resolver estos dos ejercicios usando el método de reducción al absurdo.

**Problema 5.** Demuestra que existen infinitos primos de la forma $3k + 2$.
*Ayuda:* Empieza pensando por qué todo número entero puede ser escrito de la forma $3k$, $3k + 1$, o $3k + 2$ para algún entero $k$, y sólo de una de ellas. ¿De cuáles de estos tipos pueden ser los números primos? Luego, argumenta por reducción al absurdo asumiendo que sólo hay un número finito de primos de la forma $3k + 2$, llámalos $p_1 = 2, p_2 = 5, \ldots, p_n$, y considera el número $N = 3p_1 p_2 \cdots p_n - 1$.

**Problema 6.** Una clase tiene 23 alumnos, y el peso de cada uno de ellos es un número entero de kilos. Los 23 alumnos van a jugar un partido de fútbol, para lo que elegirán un árbitro y el resto se dividirán en dos equipos de 11. Nos dicen que, sea quien sea el árbitro elegido, siempre será posible elegir dos equipos que pesen lo mismo, siendo el peso de un equipo la suma de los pesos de todos sus integrantes. Demuestra que los 23 alumnos pesan todos lo mismo.

## ¿Cómo podemos aprender a hacer demostraciones?

En matemáticas, las demostraciones no tienen que seguir un formato determinado. El método de reducción al absurdo es sólo una herramienta que puede ser útil para algunos problemas. Esta hoja contiene problemas de temas variados, y la estrategia de reducción al absurdo no tiene por qué funcionar o ser la mejor para muchos de ellos.

Un argumento no será lo suficientemente bueno como para ser considerado una demostración si no supera el *test de los compañeros del grupo*, para lo que todos los alumnos de PIM tenéis que poner de vuestra parte. Con estas pautas en mente, todos aprenderéis a hacer demostraciones:

**Test de los compañeros del grupo**

- Cuando un miembro del grupo nos cuente su argumento, le pediremos que nos explique todos los pasos que no nos queden claros.
- Tendremos cuidado con las afirmaciones del tipo "esto es obvio". Si algo es realmente obvio, tenemos que ser capaces de explicar por qué lo es.
- Cuando oigamos una afirmación ambigua o poco precisa, pediremos una aclaración.
- Si perdemos el hilo de la argumentación pediremos ayuda hasta que nos quede claro qué pasos se siguen de otros y en qué orden.
- Cuando en la demostración haya que considerar varios casos por separado, nos aseguraremos de haberlos considerado todos al final.
- Al escribir una demostración, lo que queremos demostrar tiene que ser la conclusión, nunca el punto de partida de nuestro argumento. ¡Mucho cuidado con los razonamientos hacia atrás!

Al poner en práctica estas pautas, ten en cuenta que todos cometemos errores argumentando de vez en cuando, y más con problemas complicados como los del PIM. Si encontramos un error en el argumento de otra persona, se lo comunicaremos sin faltar al respeto. Intentaremos siempre poner en valor las contribuciones de nuestros compañeros para que todo el mundo se sienta cómodo de compartir sus razonamientos con el grupo y para que entre todos podamos resolver problemas difíciles que necesiten de varios puntos de vista.

---

**Problema 7.** Tienes 9 puntos en una circunferencia tal que la distancia entre dos puntos consecutivos es constante, es decir, los puntos están en los vértices de un eneágono regular. Quieres dibujar una estrella de 9 puntas conectando estos puntos por segmentos rectos sin levantar el lápiz del papel, saltándote el mismo número de puntos cada vez. Por ejemplo, si numeramos los vértices del 1 al 9 en el sentido de las agujas del reloj y decidimos saltar 1 vértice cada vez, el 1 estará unido con el 3 (saltándonos el 2), el 3 con el 5, etc. ¿Cuántas estrellas diferentes puedes dibujar de esta manera, si el eneágono regular no cuenta como estrella?

**Problema 8.** Encuentra todas las ternas de enteros positivos $(a, b, c)$ tales que $a^2 + b^2 = 4c + 3$.

**Problema 9.** Un buscador de oro tiene un montón de arena dorada con un peso de 37 kg (y no tiene más arena aparte de eso), una balanza de dos platillos y dos pesas de 1 kg y 2 kg. El buscador de oro puede realizar dos tipos de acciones:

1. **Equilibrar la balanza:** si la balanza no está en equilibrio, puede transferir parte de la arena de un platillo al otro para que la balanza se equilibre.

2. **Añadir hasta el equilibrio:** si la balanza no está en equilibrio, puede agregar arena a uno de los platillos para que la balanza se equilibre.

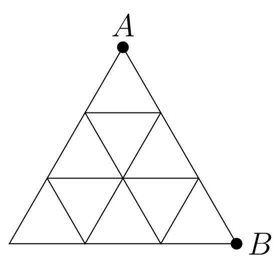
Por supuesto, solo puede realizar cada una de estas acciones si tiene suficiente arena para hacerlo.

¿Cómo puede el buscador de oro, con dos acciones en la balanza, obtener un montón de arena con exactamente 26 kg? Mezclar los dos montones de arena y simplemente colocar algo en la balanza no se considera una acción.

**Problema 10.** Las hermanas Inés y Carla decidieron hacer un video divertido y subirlo a YouTube. Primero, filmaron sus trayectos desde su casa hasta la escuela: Inés caminó durante 8 minutos y Clara caminó durante 5 minutos. Luego regresaron a casa y se sentaron frente a la computadora para editar el video. Decidieron reproducir simultáneamente el video de Inés desde el principio y el video de Carla desde el final, en dirección opuesta. Pegaron los videos cuando las hermanas estaban en el mismo punto de la calle en ambos vídeos. El resultado fue un video en el cual Inés va de su casa en dirección a la escuela, pero antes de llegar a la escuela de repente se convierte en Carla y regresa a casa, pero andando hacia atrás. ¿Cuál es la duración total del video?

**Problema 11.** Entre las 40 vasijas con las que el jefe de los bandidos llegó de visita a Alí Babá, se encontraron dos vasijas de diferentes formas y dos vasijas de diferentes colores. Demuestra que entre ellos habrá dos vasijas que sean simultáneamente de diferentes formas y colores.

**Problema 12.** Tenemos un triángulo equilátero dividido en 9 triángulos equiláteros más pequeños como en la figura, siendo el lado de abajo horizontal. Tienes que desplazarte desde el vértice $A$ hasta el vértice $B$, pero sólo se te permite ir por lados de los triángulos pequeños en las direcciones de abajo a la izquiera, abajo a la derecha, u horizontal a la derecha. Determina el número total de caminos distintos que puedes tomar.



**Problema 13.** Ana y Begoña se turnan eligiendo un entero no negativo, y cada vez tienen que hacerlo restando un divisor positivo del último número que haya elegido la otra. La primera que elija el 0 pierde. Por ejemplo, si Ana ha elegido el 2020 en uno de sus turnos, Begoña podría elegir el $2020 - 20 = 2000$, porque 20 es un divisor de 2020. Siguiendo con este ejemplo (ahora Ana tiene que elegir un divisor de 2000 y restárselo), ¿quién de las dos puede asegurarse la victoria si juega de manera óptima, haga lo que haga la otra?

**Problema 14.** Un papel cuadriculado de tamaño $8 \times 8$ se dobla varias veces a lo largo de las líneas de las celdas para obtener un cuadrado de tamaño $1 \times 1$. Después se corta este cuadrado a lo largo de un segmento que conecta los puntos medios de dos lados opuestos del cuadrado. ¿En cuántas partes se divide el cuadrado original?

**Problema 15.** En cada celda de un tablero de $11 \times 11$ hay una ficha. Durante un movimiento, se permite quitar cualquier número de fichas consecutivas del tablero (no puede haber espacios entre las fichas que se quitan), ya sea de una fila o de una columna. Juegan dos jugadores y gana el que quita la última ficha. ¿Existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores? ¿Cual es?

**Problema 16.** Dos jugadores escriben un número de $2k$ dígitos usando los números 1, 2, 3, 4, 5. El primer dígito escribe el primer jugador, el segundo dígito el segundo jugador, el tercer dígito otra vez el primer jugador y así sucesivamente. ¿Puede el segundo jugador obtener el número resultante divisible por 9 si el primero quiere evitarlo? (Ayuda: la respuesta puede depender de $k$).

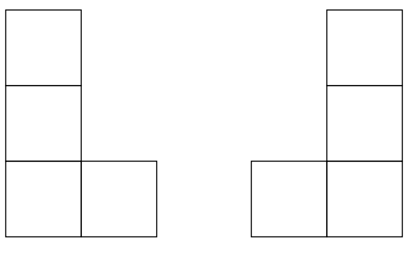
**Problema 17.** Tenemos 239 monedas aparentemente indistinguibles. Sin embargo dos monedas son falsas y idénticas y el resto de monedas son verdaderas, que se distinguen de las falsas en peso. ¿Cómo saber en tres pesajes en una balanza de plato sin pesas qué moneda es más pesada, una falsa o una verdadera? No hay necesidad de encontrar monedas falsas.

**Problema 18.** Demuestra que existe una curva de longitud $\sqrt{2\pi S} + 1$ que no puede ser cubierta por una figura plana convexa de área $S$.

**Problema 19.** En un país lejano la suma y la resta se denotan con "!" y "?", pero no se sabe qué carácter corresponde a qué operación. Cada operación se aplica a dos números, pero no se sabe sobre la resta si el número de la izquierda se resta del derecho o el derecho del izquierdo. Por ejemplo, la expresión $a?b$ significa uno de los siguientes: $a - b$, $b - a$ o $a + b$. Tampoco se sabe cómo se escriben los números en este país, pero las variables $a$, $b$ y los corchetes se usan como de costumbre.

Explica cómo usar los signos "!" y "?" para escribir una expresión que en cualquier de los casos será igual a $20a - 18b$.

**Problema 20.** Tenemos un tablero $n \times n$ al que le faltan los cuadraditos $1 \times 1$ de las cuatro esquinas. El objetivo de este problema es determinar para qué valores de $n \geq 3$ se puede cubrir (sin superponer las piezas) completamente el tablero con piezas de tetris de tipo "L" y "J", es decir, con piezas de estas formas, donde cada cuadradito es de $1 \times 1$:



a) Demuestra que si $n$ es impar no podemos cubrir el tablero de esa forma.

b) Demuestra que tampoco podemos hacerlo si $n$ es divisible por 4.

c) Demuestra que si $n$ es un número par no divisible por 4, entonces sí se puede cubrir el tablero de esa forma.

**Problema 21.** Hay dos filas de 100 personas cada una. Cualquier persona que está en la segunda fila es más alta que la que está delante de él. Demuestre que si cada fila se reorganiza en orden según la altura, entonces seguiremos teniendo que cualquier persona que está en la segunda fila es más alta que la que está delante.

**Problema 22.** El joyero ha hecho 6 joyas de plata que tienen un aspecto idéntico y pesan 22 g., 23 g., 24 g., 32 g., 34 g. y 36 g. Le ha indicado a su aprendiz que grabara su masa en cada joya. ¿Puede el joyero, en dos pesajes en una balanza de plato sin flechas ni pesas, determinar si el aprendiz no ha confundido las joyas?

**Problema 23.** Alisa y Juan juegan el siguiente juego. Hay un montón de 100 piedras sobre la mesa. Los chicos se turnan para hacer movimientos y Alisa empieza. Al realizar un movimiento, el jugador divide cada pila que contiene más de una piedra en dos pilas más pequeñas. Gana aquel que, pasado su turno, deja montones de una piedra en cada pila. Encuentra una estrategia ganadora para alguno de los ganadores.

**Problema 24.** En la pizarra se escriben dos números: 2023 y 2026. Sara y David juegan por turnos, comenzando Sara. En un turno, pueden hacer una de las siguientes acciones:

1. Reducir uno de los números restando uno de sus dígitos no nulos o el dígito no nulo del otro número.
2. Dividir uno de los números por $p$ si es divisible por $p$, donde $p = 2, 3, 5, 7$.

Gana el primero que escriba un número de una sola cifra. ¿Quién de ellos puede ganar, sin importar cómo juegue su oponente?

**Problema 25.** Tenemos una cantidad de monedas y se sabe que hay exactamente una falsa (difiere en peso de las verdaderas). Utilizando dos pesajes en una balanza de plato sin pesas, determina si la moneda falsa es más ligera o más pesada que la verdadera (no es necesario encontrarla), si hay a) 100; b) 99; c) 98 monedas. (Hay que considerar tres casos).

**Problema 26.** Demostra que los números $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ no son enteros si $n > 1$.

**Problema 27.** Tenemos un conjunto de pesas con las siguientes propiedades:

1. Las pesas son de exactamente 5 pesos diferentes.
2. Para dos pesas cualesquiera, hay otros dos pesas del mismo peso total.

¿Cuál es el menor número de pesas que puede haber en este conjunto?

**Problema 28.** Sea $n$ un número entero positivo de segundos. Lo escribimos en formato d:hh:mm:ss (días, horas, minutos, segundos). Por ejemplo, si $n = 1000000$, en formato d:hh:mm:ss sería $11 : 13 : 46 : 40$. Luego, nos olvidamos de los dos puntos para obtener un número, y restamos $n$ de él para obtener un número entero $m$. Por ejemplo, si $n = 1000000$, entonces $m = 11134640 - 1000000 = 10134640$. Determina cuál es el número entero positivo más grande tal que $m$ es divisible por él (para cualquier valor de $n$).

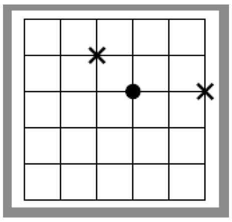
**Problema 29.** Hay 35 cubos de tamaño idéntico, pintados en seis colores diferentes. Cada cubo está pintado con los seis colores, cada cara con un color único, pero la distribución de los colores en los diferentes cubos puede ser distinta. Los cubos están colocados sobre una mesa formando un rectángulo 5 por 7. Se permite tomar cualquier columna de este rectángulo, girarla alrededor de su eje largo y colocarla nuevamente en su lugar. Lo mismo se permite hacer con las filas. ¿Es posible, mediante estas operaciones, lograr siempre que todos los cubos miren hacia arriba con las caras del mismo color? (Ayuda: analiza primero el caso de 4 cubos que forman 2 filas y 2 columnas).

**Problema 30.** En una circunferencia están marcados 20 puntos. Durante un movimiento, se permite conectar dos de ellos con un segmento que no se cruza con los segmentos dibujados anteriormente. Juegan dos jugadores. El que no puede hacer un movimiento pierde. ¿Existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores? ¿Cual es?

**Problema 31.** Dos personas juegan en un tablero de $19 \times 94$ casillas. Cada uno, por turno, marca un cuadrado siguiendo las líneas de la cuadrícula (de cualquier tamaño posible) y colorea de rojo todas las casillas dentro del cuadrado. Gana quien coloree la última casilla. No está permitido colorear una casilla dos veces. ¿Quién ganará con una estrategia adecuada y cómo se debe jugar?

¿Y que pasa si el tablero inicial es $n \times m$? ($n$ y $m$ son números naturales)

**Problema 32.** El laberinto para ratones (ver figura) es un cuadrado de 5x5 metros, donde los ratones solo pueden correr sólo por los caminos. En dos intersecciones se colocaron trozos de queso idénticos (marcados con cruces). En otra intersección hay un ratoncito sentado (marcado con un círculo). El ratoncito huele el queso, pero necesita correr la misma distancia hacia ambos trozos de queso. Por lo tanto, no sabe qué trozo elegir y se queda pensativo en su lugar.



1. Marca otros cinco cruces donde el ratoncito podría sentarse pensativo (desde donde tendría que correr la misma distancia hacia ambos trozos de queso).

2. Piensa en qué dos intersecciones se podrían colocar trozos de queso de manera que haya la mayor cantidad posible de cruces adecuadas para el ratoncito pensativo.

**Problema 33.** Sea $F$ un punto del plano y $d$ una recta del plano que no contiene a $F$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de puntos del plano cuya distancia a $F$ coincide con su distancia a la recta $l$ (en matemáticas, nos referimos a $\mathcal{P}$ como la **parábola** de foco $F$ y directriz $d$). Demuestra que existe una recta $l$ en el plano tal que para todo punto $A$ en $\mathcal{P}$, la circunferencia de diámetro $AF$ es tangente a $l$.

**Problema 34.** Dos personas juegan a un juego. Al comienzo, los números 1, 2, 3 y 4 están dispuestos en círculo. En cada turno, el primer jugador suma 1 a dos números adyacentes, mientras que el segundo jugador intercambia las posiciones de dos números adyacentes. El primer jugador gana si todos los números se vuelven iguales. ¿Puede el segundo jugador evitar que esto suceda?

**Problema 35.** En el escaparate de una joyería hay 15 diamantes. Junto a ellos hay etiquetas indicando sus pesos, que van desde 1 hasta 15 quilates. El vendedor tiene una balanza de platillos y cuatro pesas con pesos de 1, 2, 4 y 8 quilates. Al comprador solo se le permite realizar un tipo de pesaje: colocar uno de los diamantes en un platillo de la balanza y las pesas en el otro, asegurándose de que el peso indicado en la etiqueta correspondiente sea correcto. Sin embargo, por cada pesa tomada, el comprador debe pagar al vendedor 100 monedas. Si una pesa se retira de la balanza y no se utiliza en la siguiente pesada, el vendedor la recupera. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que el comprador tendrá que pagar para verificar los pesos de todos los diamantes?

**Problema 36.** Encuentra todos los cuadrados perfectos (es decir, números enteros positivos que son iguales a otro entero positivo elevado al cuadrado) que se pueden expresar como la suma de dos potencias de 2.

**Problema 37.** Sea $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de $n$ números enteros positivos (distintos dos a dos) tales que

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 2021 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

1. Si $n = 3$, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar $a_1 + a_2 + a_3$?

2. Si $n = 4$, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$?

3. Si $n \geq 5$, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$?

**Problema 38.** ¿Es posible cubrir un rectángulo de tamaño $5 \times 7$ con esquinas de tres celdas (es decir, figuras que se obtienen de un cuadrado de tamaño $2 \times 2$ quitando una celda) que no se sobresalen en varias capas, de tal forma que cada celda del rectángulo quede cubierto por el mismo número de celdas pertenecientes a las esquinas?

**Problema 39.** Entre 25 jirafas, cada dos de las cuales tienen alturas diferentes, se lleva a cabo un concurso de "¿Quién es más alto?". En cada ocasión, salen al escenario cinco jirafas, y un l jurado las clasifica justamente (según su altura) asignándoles lugares del primero al quinto. ¿Cómo deberían organizarse las salidas de las jirafas para determinar el primer, segundo y tercer premio del concurso después de siete salidas?

**Problema 40.** ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2?. Justificar la respuesta.

**Problema 41.** Explica cómo colorear una parte del plano para que haya exactamente cuatro puntos coloreados en cada circunferencia de 1 cm de radio.

**Problema 42.** Cris elige 50 números enteros positivos consecutivos y los escribe formando en un círculo en la pizarra. Cada minuto que pasa, Cris reemplaza simultáneamente cada uno de estos números $x$ por $2020a - x + 2020b$, donde $a$ y $b$ eran los números que estaban al lado de $x$. Por ejemplo, si Cris escribe los números $1, 2, 3, 4, \ldots, 50$ en un círculo, al minuto siguiente tendrá

$$2020\cdot2-1+2020\cdot50, 2020\cdot3-2+2020\cdot1, 2020\cdot4-3+2020\cdot2, 2020\cdot5-4+2020\cdot3, \ldots, 2020\cdot1-50+2020\cdot49.$$

¿Puede Cris elegir los 50 números consecutivos de manera que nunca escriba un número negativo en la pizarra, por mucho rato que siga el proceso de reemplazar números?

**Ayuda:** Si $0 < a < 1$ se tiene que $1 > a > a^2 > a^3 > a^4 > \ldots > 0$. De hecho, usando herramientas matemáticas que quizás aún no conozcas según en qué curso estés, se puede demostrar que $a^n$ se acerca a 0 todo lo que queramos si hacemos que $n$ tome un valor lo suficientemente grande. Puedes usar esto último en la resolución de este ejercicio si fuera necesario.

**Problema 43.** ¿Se puden colocar 48 puntos en el interior de un cuadrado de lado 6 cm. de manera que todo par de esos puntos está a más (>) de 1 cm de distancia? ¿Por qué? Los puntos del borde del cuadrado no están en el interior de éste.

**Problema 44.** Acher escoge dos números reales distintos, llama $x$ al más pequeño de los dos e $y$ al más grande. Luego, escoge entre $x$ a $y$ de manera aleatoria y le dice a Bárbara su valor, sin decirle si se corresponde con $x$ o con $y$. A Bárbara le gustaría adivinar si Acher le ha dicho el valor de $x$ o de $y$, pero no puede hacerle ninguna pregunta a Acher.

a) Si Bárbara sabe que los números que ha elegido Acher están en el intervalo $(0, 1)$, explica qué estrategia puede seguir Bárbara para tener más de un 50% de posibilidades de adivinar si el valor que le ha dicho Acher se correspondía con $x$.

b) Si la única información de la que dispone Bárbara sobre los números que ha escogido Acher es que son dos números reales distintos, ¿es posible que Bárbara tenga más de un 50% de posibilidades de adivinar si el valor que le ha dicho Acher se correspondía con $x$?

**Problema 45.** Harry Potter quiere salir de una habitación circular con seis puertas, cinco de las cuales están cerradas con llave. En un intento, puede revisar tres puertas adyacentes y, si una de ellas no está cerrada con llave, puede salir por ella. Después de cada intento, Voldemort cierra la puerta que se abrió y abre una de las puertas adyacentes. Harry Potter no sabe que puerta se abrirá. Busca una estrategia para ayudar a Harry a salir de la habitación.

**Problema 46.** El dragón ha encerrado a seis enanitos en una cueva y les ha dicho: "Tengo siete sombreros de los siete colores del arco iris. Mañana por la mañana os vendaré los ojos y colocaré un sombrero en la cabeza de cada uno, escondiendo uno de los sombreros. Luego os quitaré las vendas de los ojos, y podréis ver los sombreros en las cabezas de los demás, pero no os permitiré comunicarse entre vosotros. Después de eso, cada uno en secreto me dirá el color del sombrero que está escondido. Si al menos tres aciertan, os liberaré. Si aciertan menos, me os comeré para el almuerzo". ¿Cómo pueden los enanitos acordar de antemano un plan para salvarse?

**Problema 47.** Dentro de una caja grande, hay dos cajas más pequeñas, dentro de cada una de ellas hay dos cajas aún más pequeñas, y así sucesivamente durante $n$ iteraciones. Dentro de cada una de las $2^n$ cajas más pequeñas, hay una moneda, algunas con la cara hacia arriba y otras con la cruz hacia arriba. En un solo movimiento, puedes voltear una caja completa junto con su contenido. Debes demostrar que en no más de $n$ movimientos puedes organizar las cajas de manera que el número de monedas con la cara hacia arriba sea igual al número de monedas con la cruz hacia arriba.

**Problema 48.** A los participantes de una olimpiada de matemáticas se les ofrecieron $n$ preguntas. El jurado determina la dificultad de cada una de las preguntas como una cantidad entera positiva de puntos que los participantes obtienen por respuestas correctas a las preguntas. Por respuestas incorrectas (o parcialmente correctos) no se otorgan puntos, y todos los puntos obtenidos por el participante se suman. Cuando todos los participantes entregaron sus hojas de respuestas, resultó que el jurado puede determinar la dificultad de las preguntas de tal manera que las posiciones entre los participantes se distribuyan de cualquier manera previamente establecida. ¿Cuál es el número máximo de participantes que podría haber sido?

**Problema 49.** La tabla triangular se construye siguiendo la siguiente regla: en la parte superior de la tabla, se escribe un único número natural $a > 1$, y luego, debajo de cada número $k$, escribimos a la izquierda el número $k^2$ y a la derecha el número $k + 1$. Demuestra que en cada fila de la tabla todos los números son diferentes.

Por ejemplo, cuando $a = 2$, la segunda fila consiste en los números 4 y 3, la tercera fila en los números 16, 5, 9 y 4, la cuarta fila en los números 256,17, 25, 6, 81, 10, 16 y 5.